

09

Индукцированные шумом параметрические колебания в нелинейном осцилляторе

© В.С. Анищенко, Я.И. Боев, Т.Е. Вадивасова

Саратовский государственный университет

E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 29 сентября 2010 г.

Рассматривается индуцирование стохастических колебаний в нелинейном осцилляторе с шумовой модуляцией частоты. Показано, что исследуемые колебания характеризуются наличием аттрактора (т.е. не зависят от начальных условий), но не демонстрируют эффекта синхронизации, типичного для автоколебательных систем.

Среди множества различных колебательных процессов в природе и технике можно выделить в качестве принципиально важного класса колебаний так называемые автоколебательные процессы, обладающие независимостью от начальных условий, и их характеристики определяются исключительно параметрами системы. В фазовом пространстве динамической системы образом автоколебаний является аттрактор. В классической радиофизике системы, способные работать в режиме автоколебаний, называют генераторами или автогенераторами [1]. Энергия нелинейной диссипативной системы в режиме автоколебаний пополняется за счет постоянного источника, однако это положение не является определяющим свойством автоколебаний. Отказавшись от него, мы можем обобщить понятие автоколебаний на широкий класс неавтономных систем, например на стохастические осцилляторы, колебания которых возникают в результате действия шума [2,3].

В то же время в радиофизической литературе принято выделять класс так называемых параметрических генераторов. В таких системах колебания возбуждаются за счет параметрической неустойчивости при модуляции некоторого параметра внешним сигналом. Изменяемый параметр должен определять накопленную в колебательной системе энергию (например, это может быть емкость или индуктивность). Возникает вопрос, являются ли параметрические колебания разновидностью автоколебательного режима? Для ответа в свете недавно

полученных результатов [2] необходимо подтвердить выполнение двух условий: во-первых, установить наличие аттрактора в неавтономной параметрически возбуждаемой системе, во-вторых, показать, что параметрические колебания демонстрируют явление синхронизации, которое можно рассматривать как одно из фундаментальных свойств автоколебательной системы [4].

Очевидно, что параметрические колебания, возникающие в результате периодической накачки, не могут быть синхронизованы, так как в этом случае между частотой накачки $\omega_{\text{пар}}$ и частотой параметрических колебаний ω должно выполняться соотношение: $\omega = n\omega_{\text{пар}}/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Захват частоты колебаний внешним сигналом нарушил бы необходимое соотношение частот. Однако известно, что параметрическая неустойчивость может возникать в результате шумовой модуляции параметра [5]. В этом случае спектр сигнала накачки является сплошным в некотором диапазоне частот и строгое соотношение между частотами колебаний и накачки отсутствует. Мы не можем исключить, что стохастические колебания в осцилляторе с шумовой модуляцией параметра — это особая разновидность автоколебаний. Известно несколько примеров нелинейных диссипативных систем, в которых индуцированные шумом колебания удовлетворяют двум отмеченным выше условиям автоколебаний. Одним из них является возбудимая система ФитцХью—Нагумо, в которой под действием шума возникают стохастические колебания, обладающие свойствами автоколебательного процесса: система имеет аттрактор и демонстрирует эффекты внешней и взаимной синхронизации [6,7]. Целью настоящей работы является проверка указанных условий в нелинейном осцилляторе Дуффинга, в котором за счет модуляции частоты шумовым сигналом возникают параметрические колебания.

Рассмотрим осциллятор Дуффинга с внешней шумовой модуляцией частоты:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\alpha y - \omega_0^2 \{1 + K\xi(t)\}x - \beta x^3. \quad (1)$$

В уравнениях (1) α — параметр потерь в контуре ($\alpha > 0$), β — коэффициент нелинейности (было выбрано значение $\beta = 1$), ω_0 — резонансная частота контура в линейном приближении, $\xi(t)$ — сигнал накачки, K — коэффициент, управляющий амплитудой сигнала накачки. При выбранных параметрах в отсутствие сигнала накачки система имеет единственное состояние равновесия в начале координат, которое

всегда устойчиво. Похожие задачи, связанные с шумовым параметрическим возбуждением нелинейных осцилляторов, рассматривались в работах [3,8], где делался вывод об автоколебательном характере индуцированного шумом режима. Однако вопрос о синхронизации колебаний в этих работах не рассматривался.

В качестве сигнала накачки в наших исследованиях использовались белый и цветной шум. Необходимо отметить, что возможность возникновения параметрической неустойчивости в случае накачки белым шумом в [5] отрицается. Однако численное моделирование свидетельствует об обратном: устойчивая точка равновесия становится неустойчивой для широкого класса шумовых сигналов накачки, включая не только белый шум, но и низкочастотный цветной шум. С точки зрения целей исследования полученные для белого и цветного шума результаты были качественно идентичными. В связи с этим рассмотрим случай, когда сигналом накачки служит цветной шум, получаемый в результате линейной фильтрации белого шума (процесс Орнштейна–Уленбека):

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\gamma\eta - \omega_1^2\xi + \sqrt{2D}n(t), \quad (2)$$

Уравнения (2) представляют собой уравнения линейного осциллятора, возбуждаемого аддитивным белым гауссовым шумом $n(t)$ ($\langle n(t) \rangle \equiv 0$, $\langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$), где угловые скобки означают статистическое среднее, $\delta(\tau)$ — функция Дирака. Параметр D определяет интенсивность шума. Осциллятор имеет резонансную частоту ω_1 и характеризуется затуханием γ . В результате фильтрации на выходе контура имеет место цветной гауссов шум $\xi(t)$. При малом затухании процесс $\xi(t)$ представляет собой узкополосный („гармонический“) шум, который и используется в качестве сигнала параметрической модуляции. Его спектральная плотность имеет форму, близкую к лоренциану с максимумом на резонансной частоте ω_1 и шириной спектра на уровне половинной мощности $\Delta\omega = \gamma$. Дисперсия процесса есть $\sigma_\xi^2 = D/(\gamma\omega_1^2)$.

Положим частоту нелинейного осциллятора $\omega_0 = 1$ и выберем $\omega_1 = 2$. На рис. 1 представлены результаты расчета старшего ляпуновского показателя системы (1) с шумом (2) λ_1 в зависимости от интенсивности сигнала накачки K . Ляпуновский показатель рассчитывался как для точки равновесия (кривая 1), так и для траектории, выходящей из некоторой произвольно выбранной точки, отличной от точки равновесия (кривая 2). Начиная с некоторого порогового значения $K = K_{th} \approx 0.2$ старший ляпуновский показатель точки равновесия

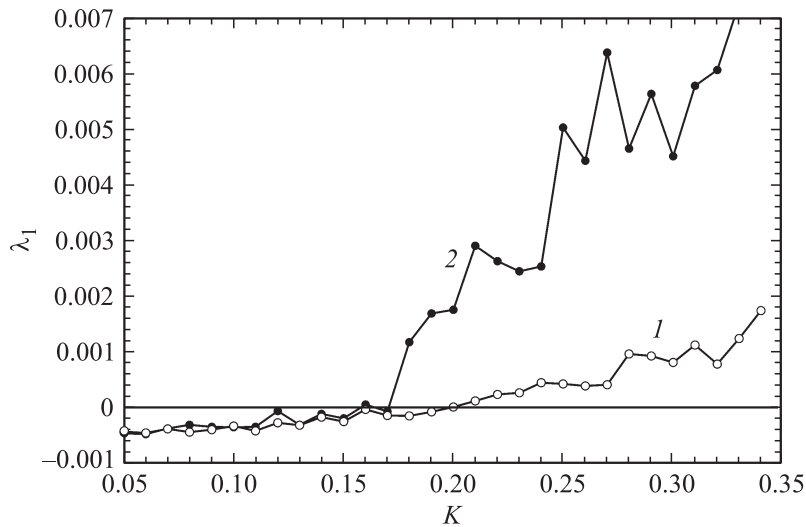


Рис. 1. Зависимость старшего ляпуновского показателя от интенсивности K шумового сигнала накачки в системе (1) с шумом (2) при $\gamma = 0.2$, $D = 0.01$: 1 — для точки равновесия в начале координат; 2 — для произвольно выбранной траектории.

становится из отрицательного положительным (кривая 1). Это означает, что точка равновесия теряет устойчивость, и в системе возбуждаются колебания.

На рис. 2 приведены спектр стохастических параметрических колебаний и проекция фазового портрета на плоскость переменных x, y . В силу селективных свойств осциллятора стохастические параметрические колебания, возбуждаемые гармоническим шумом, являются узкополосными (рис. 2, a). Расчеты показывают, что плотность вероятности $p(x)$ максимальна в окрестности нуля (по-видимому, в нуле она обращается в бесконечность) и монотонно убывает с ростом аргумента. Можно выделить ограниченную область фазовой плоскости, вероятность нахождения в которой для любой траектории спустя некоторый период установления будет близка к единице (рис. 2, b). Эту область можно понимать как стохастический аттрактор системы. Отметим, что спектр и вероятностное распределение параметрических колебаний

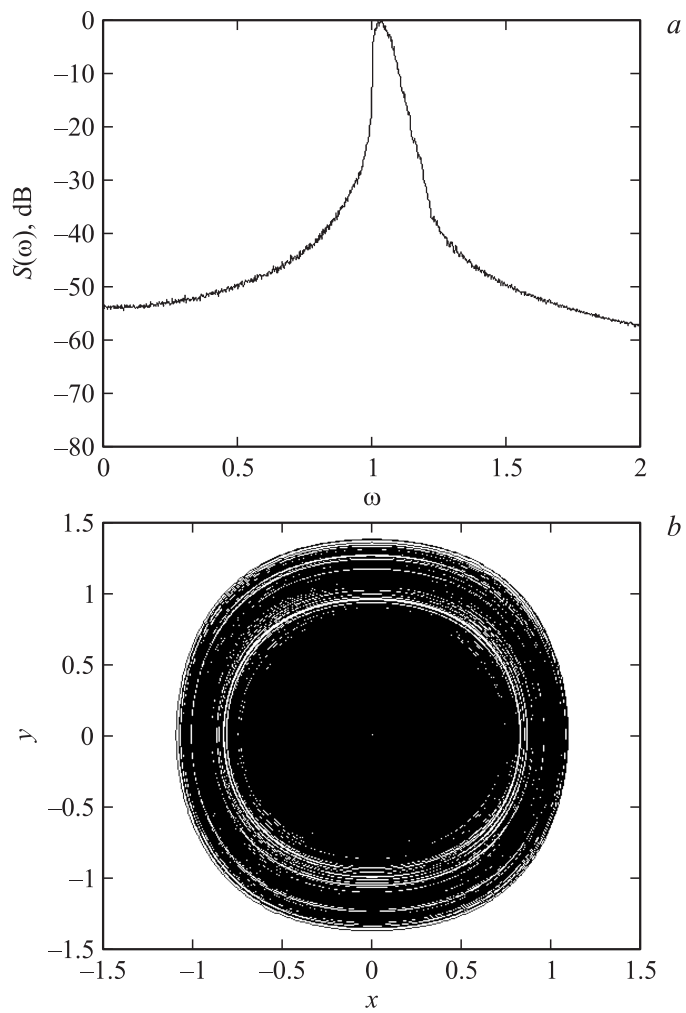


Рис. 2. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний (а) и проекция фазовых траекторий на плоскость xy (b) в системе (1) с шумом (2) при $\gamma = 0.2$, $K = 0.25$, $D = 0.01$.

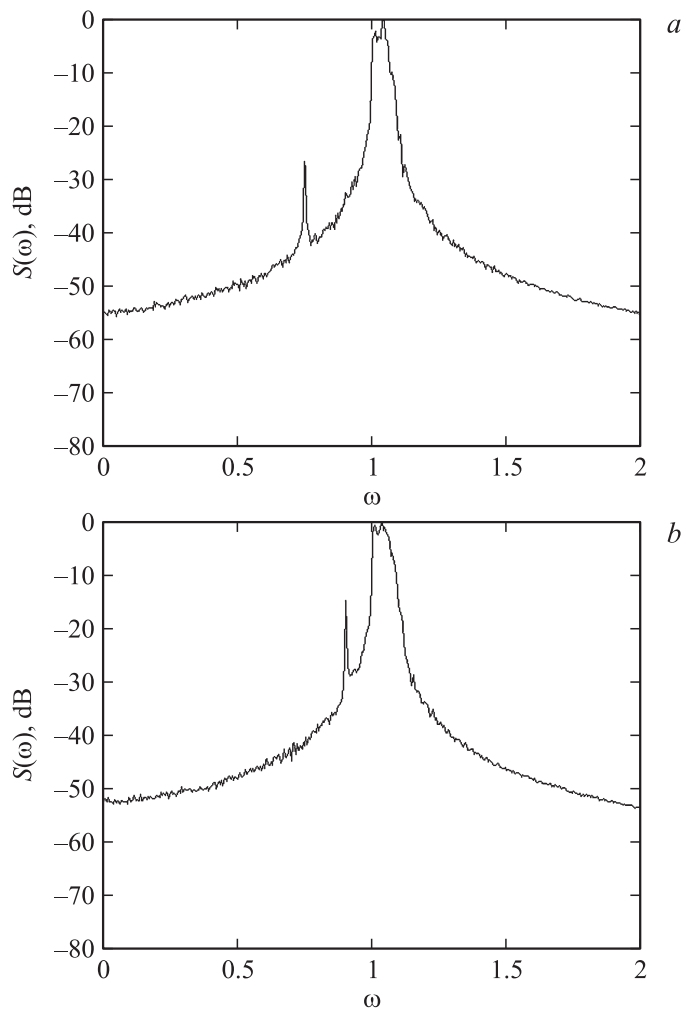


Рис. 3. Нормированный спектр мощности параметрических колебаний в присутствии внешнего сигнала с амплитудой $B = 0.002$ и частотой $\omega_{\text{ext}} = 0.75$ (a) и $\omega_{\text{ext}} = 0.9$ (b).

слабо чувствительны к изменениям интенсивности сигнала накачки K и ширине спектра накачки, определяемой параметром γ . По крайней мере в интервалах $0.02 < K < 0.5$ и $0.2 < \gamma < 0.5$ результаты эквивалентны представленным на рис. 2.

Была предпринята попытка синхронизовать параметрические колебания внешним гармоническим сигналом. С этой целью во второе уравнение системы (1) аддитивно вводился внешний гармонический сигнал $F(t) = B \sin \omega_{\text{ext}} t$. Спектры результирующего сигнала системы, рассчитанные по переменной $x(t)$, представлены на рис. 3, *a, b*. При фиксированной амплитуде воздействия изменялась частота воздействия $1 - \Delta \leq \omega_{\text{ext}} \leq 1 + \Delta$ (рис. 3, *a, b*), а также при фиксированной частоте $\omega_{\text{ext}} = 0.92$ изменялась амплитуда воздействия $0.001 \leq B \leq 0.01$. Ни в первом, ни во втором случаях эффекта синхронизации зарегистрировано не было.

Так же расчеты проводились, когда сигналом накачки служил белый шум ($\xi(t) = \sqrt{2D}n(t)$). Спектр параметрических стохастических колебаний при этом был несколько шире, в сравнении со случаем гармонического шума, и эффекта синхронизации внешним сигналом также не наблюдалось.

Результаты проведенных исследований состоят в следующем.

1. При использовании в качестве сигнала накачки цветного и белого шума в осцилляторе Дуффинга возбуждаются стохастические параметрические колебания, обладающие неким порогом по отношению к интенсивности сигнала накачки.

2. Параметрическим колебаниям в фазовом пространстве отвечает аттрактор, характеризующийся положительным старшим показателем Ляпунова ($\lambda_1 > 0$).

3. Режим вызванных шумовой накачкой параметрических колебаний не поддается внешней синхронизации гармоническим сигналом. Вариация параметров системы и синхронизирующего сигнала приводит к незначительным изменениям ширины и формы спектра мощности параметрических колебаний.

Таким образом, параметрически возбуждаемые шумовым сигналом колебания в осцилляторе Дуффинга характеризуются наличием аттрактора, но не реализуют эффекта синхронизации, типичного для автоколебательных систем. Можно сделать вывод, что данный вид колебаний не является автоколебательным режимом. Проведенные нами аналогичные исследования на ряде других систем, параметрически

возбуждаемых шумом, дали сходные результаты. Это позволяет предположить, что сделанные в работе выводы справедливы для любых систем с параметрической шумовой накачкой.

Работа выполнена в рамках АВЦП МО и науки РФ „Развитие потенциала высшей школы на 2009–2011 годы“.

Список литературы

- [1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
- [2] Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Стрелкова Г.И. // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6(2). С. 1–20.
- [3] Landa P.S., Zaikin A.A. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 3536–3544.
- [4] Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [5] Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
- [6] FitzHugh R.A. // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445–466.
- [7] Феоктистов А.В., Астахов С.В., Анищенко В.С. // Нелинейная динамика. 2010 (в печати).
- [8] Ланда П.С. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 18(1). С. 3–10.