

01;03

## Прямой расчет турбулентных течений с перемежаемостью, формирующихся в сферическом слое при модуляции скорости вращения внешней сферы

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва  
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 24 августа 2012 г.

Численно исследованы турбулентные течения вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое. Рассматривается случай встречного вращения сферических границ, причем угловая скорость внешней сферы периодически изменяется, а угловая скорость внутренней остается постоянной. В полученных решениях наблюдается смена во времени ламинарных и турбулентных режимов, пространственно занимающих всю область рассматриваемого течения. Показано соответствие численных результатов имеющимся экспериментальным данным по форме сигнала скорости и по относительной продолжительности его ламинарной части. Установлены причины перехода к хаосу и появления перемежаемости при рассматриваемом переходе.

Переход течений к турбулентности часто сопровождается перемежаемостью, представляющей собой чередование ламинарных и турбулентных участков в пространственной структуре течений. Такая перемежаемость наблюдается как в течениях, формируемых встречным движением границ, — цилиндрическое [1] и плоское [2,3] течения Куэтта, так и при течении в трубах [4]. Иная ситуация складывается при встречном движении границ в сферическом течении Куэтта (СТК). СТК представляет собой течение вязкой несжимаемой жидкости под действием вращения концентрически расположенных сфер вокруг общей оси. При стационарной скорости вращения сфер существуют три параметра подобия течения. Ими являются числа Рейнольдса  $Re_k = \Omega_k r_k^2 / \nu$ , определяемые для внутренней ( $k = 1$ ) и внешней ( $k = 2$ ) сфер, и относительная толщина слоя жидкости  $\delta = (r_2 - r_1) / r_1$ . Здесь

$r_k, \Omega_k (k = 1, 2)$  — радиус и угловая скорость вращения соответствующей сферы,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости в слое.

В СТК при встречном вращении границ перемежаемость может наблюдаться в виде чередования ламинарных и турбулентных участков во времени. Чередование во времени обеспечивается изменением пространственной структуры течения во всей занимаемой им области. Такой эффект наблюдался при переходах к хаосу, инициируемых как увеличением скорости вращения внутренней сферы [5], так и периодическим изменением скорости вращения внешней сферы [6]. В отличие от изучавшейся численными методами перемежаемости в плоском течении Куэтта [3] и трубах [4], перемежаемость в СТК численно до сих пор не исследовалась.

Цель данной работы состоит в том, чтобы на основе численных результатов объяснить причины перехода к хаосу и появления перемежаемости в том случае, когда переход инициирован периодическим изменением скорости вращения внешней сферы. Течение вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U \times \text{rot } U - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } U, \quad \text{div } U = 0$$

с условиями прилипания и непротекания на границах, которые в сферической системе координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями имеют вид  $u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta$ ,  $u_r(r = r_k) = 0$ ,  $u_\theta(r = r_k) = 0$ ,  $k = 1, 2$ . Здесь  $U$ ,  $p$ ,  $\rho$  — скорость, давление и плотность жидкости, а  $u_\varphi u_r u_\theta$  — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости. Скорость вращения внутренней сферы постоянна, а скорость вращения внешней сферы периодически изменяется  $\Omega_2(t) = \Omega_{20}(1 + A \sin(2\pi f t + \psi))$ ,  $A$ ,  $f$  и  $\Omega_{20}$  — соответственно амплитуда, частота модуляции и средняя скорость вращения внешней сферы.

Вычислительный алгоритм основан на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации Навье–Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности для интегрирования по времени [7]. Решались как полная система уравнений, так и система уравнений, описывающая стационарные течения, симметричные относительно плоскости экватора и оси вращения (далее — двумерные течения). При решении полной системы уравнений

Осредненный за период модуляции скорости вращения внешней сферы момент сил трения  $M$ , передаваемый на внутреннюю сферу (определение [8]), в зависимости от количества узлов сетки  $N$

Полная система уравнений ( $A = 0.05$ )		Двумерные течения ( $A = 0.3$ )	
$N \cdot 10^{-5}$	$M \cdot 10^6, \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-2}$	$N \cdot 10^{-4}$	$M \cdot 10^6, \text{m}^5 \cdot \text{s}^{-2}$
4.1	6.290	0.8	5.825
5.8	6.306	1.8	5.790
11.5	6.308	2.6	5.787

дискретизация по пространству проводилась на неравномерных по  $r$  и  $\theta$  сетках. Отношение максимального размера ячейки к минимальному равно четырем, общее количество узлов  $5.76 \cdot 10^5$ . При расчете двумерных течений использовались равномерные сетки с общим количеством узлов  $1.8 \cdot 10^4$ . Для определения чувствительности рассчитываемых величин к размерам сетки проведены методические расчеты. В таблице приведена зависимость величины осредненного момента сил трения  $M$ , передаваемого на внутреннюю сферу, от общего количества узлов сетки. Видно, что увеличение количества узлов более чем в два раза приводит к изменению момента менее чем на 0.6%.

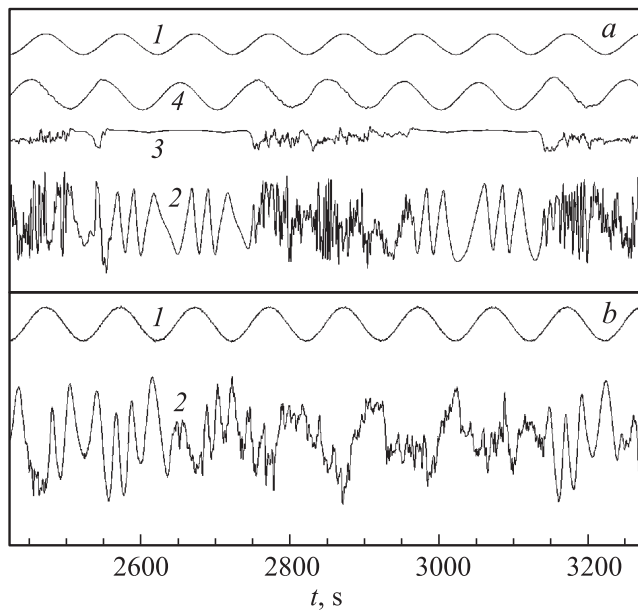
Линейная устойчивость двумерных течений изучалась по отношению к трехмерным возмущениям в виде бегущих азимутальных волн с азимутальными числами  $m = 2, 3, 4$ . Система линеаризованных относительно возмущений уравнений интегрировалась по времени до выхода решения на асимптотическое поведение  $\sim \exp(\sigma t)$  [8]. Действительная часть  $\sigma_{re}$  — это инкремент нарастания/затухания возмущения, мнимая часть определяет фазовую угловую скорость рассматриваемой моды  $C_\omega = -\sigma_{im}/m$ .

Расчеты проведены при параметрах, соответствующих условиям проведения экспериментов [6]:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $r_1 = 0.075 \text{m}$ ,  $r_2 = 0.15 \text{m}$ ,  $\Omega_{20} = -2 \text{s}^{-1}$  ( $\text{Re}_2 = -900$ ),  $\Omega_1 = 3.68 \text{s}^{-1}$  ( $\text{Re}_1 = 413$ ),  $f = 0.01 \text{Hz}$ ,  $A \leq 0.1$ . Продолжительность одного варианта расчета составляла  $4.5 \cdot 10^3 \text{s}$ , отсчитываемых с момента первого перехода от ламинарного течения к хаотическому. Продолжительность переходного периода составляет  $9 \cdot 10^2 \text{s}$ . Таким образом, относительная продолжительность ламинарных участков при наличии перемежаемо-

сти определялась на интервале времени не менее  $3.6 \cdot 10^3$  s или 36 периодов изменения скорости внешней сферы. Расчеты проведены с постоянным по величине шагом по времени 0.025 s, один оборот внутренней сферы составлял 68 шагов по времени. Результаты расчета представлены ниже в зависимости от безразмерных параметров, аналогичных предложенным в [9]. Это относительная толщина пограничного слоя  $\delta/r_2 = (2\nu/2\pi f)^{1/2}/r_2$  и модифицированное число Рейнольдса  $Re_{m2} = (ARe_2)(\delta/r_2)$ .

При постоянных скоростях вращения сфер при указанных выше параметрах в слое наблюдалось периодическое течение, состоящее из трех симметричных относительно плоскости экватора вихрей, распространяющихся в направлении вращения внешней сферы [8]. Такое течение, как было показано в [8], является результатом синхронизации частот предшествующего режима течения с тремя независимыми частотами в спектре. Расчеты показывают, что при небольших амплитудах модуляции исходное периодическое течение сохраняется. Однако как фазовая скорость, так и интенсивность вихрей становятся неравномерными. Повышение амплитуды модуляции свыше  $Re_{m2} > 13.2$  приводит к разрушению исходной пространственной структуры и к хаотизации течения. В экспериментах [6] хаотизация течения наблюдалась при  $Re_{m2} > 12.2$ . Вблизи порога формирования хаотических режимов течения и в эксперименте, и в расчете наблюдается перемежаемость (рис. 1). В зависимости азимутальной скорости от времени в расчете, так же как в эксперименте [6], заметно чередование во времени ламинарных и турбулентных участков. Ламинарные участки соответствуют по своей частоте исходному течению. Характерным свойством перемежаемости является уменьшение относительной продолжительности ламинарных участков  $\tau = T_{lam}/T$  с увеличением надкритичности.  $T_{lam}$  — суммарная продолжительность ламинарных участков,  $T$  — общая продолжительность всей выборки. Представленная на рис. 2 зависимость  $\tau$  от  $Re_{m2}$  свидетельствует о соответствии результатов расчета имеющимся экспериментальным данным.

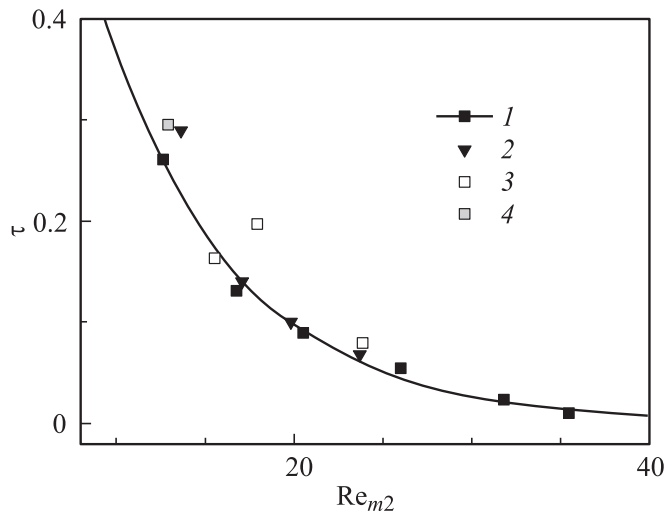
Характерной для перемежаемости является и зависимость от времени момента сил трения на внутренней сфере (3, рис. 1). Средняя величина момента сил трения для турбулентных участков оказалась ниже, чем для ламинарных участков. Ранее уменьшение величины момента сил трения было обнаружено при расчете перехода к хаосу,



**Рис. 1.** Расчетная ( $a$ ,  $Re_{m2} = 15.6$ ) и экспериментальная ( $b$ ,  $Re_{m2} = 12.7$ ) зависимости от времени для скорости вращения внешней сферы (1), азимутальной компоненты скорости течения (2), момента сил трения на внутренней сфере (3) и момента сил трения на внешней сфере (4).

инициированного увеличением скорости вращения внутренней сферы [8].

Можно предположить, что формирование турбулентного течения при увеличении амплитуды модуляции связано с разрушением режима синхронизации в исходном течении, а перемежаемость вызвана кратковременным созданием условий, способствующих восстановлению синхронизации. Как было показано в [8], появление синхронизации в течении при увеличении  $Re_1$  обусловлено сближением фазовых скоростей линейных мод (прежде всего, симметричных мод с азимутальными числами 2 и 3, как показано на рис. 2,  $b$  в [8]) по величине и направлению. Рассмотрим, каким образом изменяются фазовые скорости линейных

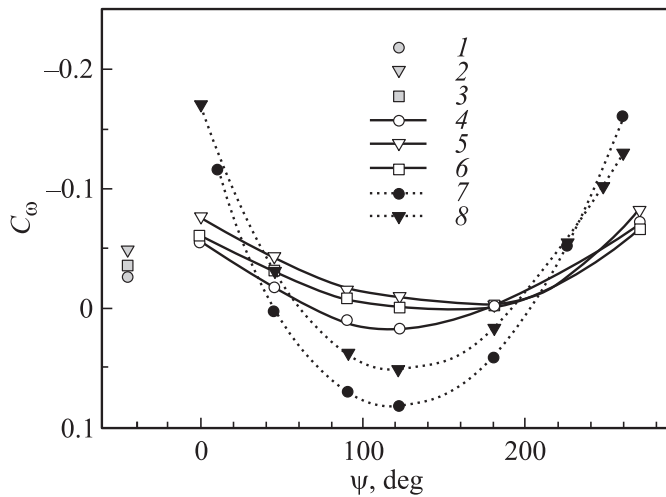


**Рис. 2.** Относительная продолжительность ламинарных участков  $\tau$  в зависимости от числа  $Re_{m2}$  в эксперименте (1,2) и расчете (3, 4 —  $\delta/r_2 = 0.27$ ). Линией показана экспоненциальная аппроксимация экспериментальных данных: 1 —  $\delta/r_2 = 0.27$ , 2 —  $\delta/r_2 = 0.19$ , 3 — увеличение  $A$ , 4 — уменьшение  $A$ .

мод под воздействием периодического изменения скорости вращения внешней сферы.

Строгая постановка задач о линейной устойчивости течений с периодическими граничными условиями возможна к настоящему времени только для нескольких частных случаев [10]. Это или двумерные течения, или трехмерные течения в прямолинейных каналах с параллельными стенками. Поэтому анализ линейной устойчивости проводился в квазистационарном приближении в предположении, что устойчивость определяется полем скорости только в текущий момент времени. Возможность использования квазистационарного приближения при анализе линейной устойчивости течений вязкой несжимаемой жидкости в сферических слоях показана в [11,12].

Результаты использования такого подхода показаны на рис. 3 в виде зависимости фазовых угловых скоростей экваторосимметричных мод от фазы изменения скорости вращения внешней сферы. Видно, что угловые



**Рис. 3.** Фазовые угловые скорости экваторосимметричных линейных мод  $C_\omega$  ( $s^{-1}$ ) в зависимости от фазы скорости вращения внешней сферы  $\varphi$ . 1–3 — фазовые скорости при стационарных граничных условиях ( $Re_{m2} = 0$ ) для линейных мод с азимутальными числами 2, 3 и 4 соответственно; 4–6 — фазовые скорости при  $Re_{m2} = 23.93$  для линейных мод с азимутальными числами 2, 3 и 4 соответственно; 7, 8 — фазовые скорости при  $Re_{m2} = 71.8$  для линейных мод с азимутальными числами 2 и 3.

скорости линейных мод могут отличаться от аналогичных величин, полученных при стационарных граничных условиях (1–3, рис. 3). С увеличением амплитуды модуляции  $A$  эти отличия увеличиваются. При некоторых значениях амплитуд модуляции  $A$  может измениться не только величина фазовой угловой скорости, но и ее направление. Причем направление изменяется не для всех мод одновременно (4–6, рис. 3). Таким образом, при рассматриваемой амплитуде модуляции в диапазоне фаз от 60 до 180 deg условие равного направления распространения всех линейных мод не сохраняется. Это означает, что синхронизация в указанном выше диапазоне фаз невозможна, что и означает переход к хаосу. Вместе с тем вне указанного выше диапазона угловые скорости линейных мод равны по величине и сохраняют прежнее направление, что создает возможности для восстановления

синхронизации. Таким образом, для данной амплитуды модуляции возможны два вида течений — хаотические и с синхронизацией, что и создает предпосылки для существования режимов с перемежаемостью. Уменьшение рассматриваемой величины амплитуды модуляции приведет к восстановлению первоначального направления распространения линейных мод, что означает восстановление синхронизации и устранение условий формирования хаоса. Это позволяет объяснить наличие критической величины амплитуды модуляции, наблюдавшейся в [6]. Повышение амплитуды модуляции (7, 8, рис. 3) приводит к уменьшению диапазона фаз, в котором угловые скорости линейных мод сохраняют прежнее направление и близки по величине. Это может означать уменьшение продолжительности течений с синхронизацией, что и наблюдается как в эксперименте, так и в прямом расчете.

Таким образом, проведенный анализ поведения фазовых скоростей распространения линейных мод позволяет объяснить как сам факт появления хаотических течений с перемежаемостью, так и некоторые характерные свойства таких течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11-08-00009.

## Список литературы

- [1] *Coles D.* // J. Fluid Mech. 1965. Pt. 3. P. 385–425.
- [2] *Bottin S., Dauchot O., Daviaud F.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. N 22. P. 4377–4380.
- [3] *Barkley D., Tuckerman L.S.* // Phys. Rev. Lett. 2005. PRL 94. P. 014 502.
- [4] *Avila K. et al.* // Science. 2011. V. 333. P. 192–196.
- [5] *Герценштейн С.Я., Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Докл. РАН. 2003. Т. 390. № 4. С. 478–483. (*Gertsentshtein S.Ya., Zhilenko D.Yu., Krivososova O.E.* // Doklady Physics. 2003. V. 48. N 6. P. 309.)
- [6] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. В. 9. С. 51–58. (*Zhilenko D.Yu., Krivososova O.E.* // Technical Physics Letters. 2012. V. 38. N 5. P. 421–424.)
- [7] *Nikitin N.* // J. Comp. Phys. 2006. V. 217. (2). P. 759–781.
- [8] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э., Никитин Н.В.* // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 6. С. 22–33. (*Zhilenko D.Yu., Krivososova O.E., Nikitin N.V.* // Fluid Dynamics. 2007. V. 42. N 6. P. 886–896.)
- [9] *Hollerbach R. et al.* // Phys. fluids. 2002. V. 14. N 12. P. 4192–4205.



- [10] *Schmid P.J.* // Annual Rev. Fluid Mech. 2007. V. 39. P. 129–162.
- [11] Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. // Докл. РАН. 2009. Т. 429. № 3. С. 332–335. (*Zhilenko D.Yu., Krivonosova O.E.* // Doklady Physics. 2009. V. 54. N 11. P. 520–523.)
- [12] Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э. // МЖГ. 2011. № 3. С. 28–41. (*Zhilenko D.Yu., Krivonosova O.E.* // Fluid Dynamics. 2011. V. 46. N 3. P. 363–374.)