

01.3

Статистические характеристики времен возврата Пуанкаре при локальном подходе в условиях воздействия шума

© В.С. Анищенко, Я.И. Боев, Н.И. Бирюкова

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: wadim@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 26 ноября 2012 г.

Анализируются зависимости среднего времени и дисперсии времен возврата Пуанкаре от величины ε -окрестности начального состояния в отсутствие и при наличии внешнего шума.

Предметом исследования в работе является анализ статистических характеристик последовательности времен возврата Пуанкаре в ε -окрестность выбранного начального состояния \vec{x}_0 в хаотическом аттракторе динамической системы (локальный или точечный подход). Доказано, что при локальном подходе плотность распределения времен первых возвратов Пуанкаре в ε -окрестность начального состояния \vec{x}_0 подчиняется экспоненциальному закону [1]:

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}\right), \quad \tau_r \geq \tau_r^*. \quad (1)$$

Здесь $\langle \tau_r \rangle$ — среднее время первого возврата в ε -окрестность, τ_r^* — некоторое малое значение τ_r . Отметим, что выражение (1) не зависит от размерности исследуемой динамической системы, а также явно не зависит от размера ε . Зависимость от величины ε и от конкретного задания начального состояния входит в (1) через $\langle \tau_r \rangle$. Выражение (1) получено в предположении, что известна вероятностная мера $p(x)$ для предельного множества в фазовом пространстве динамической системы, для которого рассматривается проблема возвратов.

Вторым важным теоретическим результатом при локальном подходе является теорема (лемма) Каца [2], которая устанавливает взаимосвязь среднего времени первого возвращения Пуанкаре $\langle \tau \rangle$ с вероятностью

пребывания фазовой траектории системы в ε -окрестности заданного состояния \vec{x}_0 $P(\vec{x}_0, \varepsilon)$:

$$\langle \tau_r \rangle = \frac{\gamma}{P(\varepsilon, \vec{x}_0)}. \quad (2)$$

Здесь γ есть некоторая постоянная, которая для дискретных динамических систем равна 1. В дальнейшем положим $\gamma = 1$.

Распределение (1) с учетом (2) можно переписать в виде:

$$p(\tau_r) = P(\varepsilon, \vec{x}_0) \exp(-P(\varepsilon, \vec{x}_0)\tau_r). \quad (3)$$

При экспериментальных исследованиях оказывается удобным рассматривать $\ln[p(\tau_r)]$, так как график представляет собой прямую линию $y = a - kx$:

$$\ln[p(\tau_r)] = C - \frac{\tau_r}{\langle \tau_r \rangle}, \quad C = \ln P(\varepsilon, \vec{x}_0) \quad (4)$$

или

$$\ln p(\tau_r) = C - P(\varepsilon, \vec{x}_0)\tau_r.$$

Коэффициент k наклона прямой $\ln p(\tau_r)$ от τ_r выражается как:

$$k = \frac{1}{\langle \tau_r \rangle} = -P(\varepsilon, \vec{x}_0) \quad (5)$$

Если вероятностная мера $p(x)$ задана, то для вероятности $P(\varepsilon, \vec{x}_0)$ получается следующее выражение:

$$P(\varepsilon, \vec{x}_0) = \int_{\vec{x}_0 - \frac{\varepsilon}{2}}^{\vec{x}_0 + \frac{\varepsilon}{2}} p(\vec{x}) d\vec{x} \approx p(\vec{x}_0) \varepsilon^{d_f}, \quad (6)$$

где $\varepsilon \ll 1$, d_f — фрактальная размерность предельного множества (аттрактора) в фазовом пространстве системы. Отметим, что для одномерных дискретных отображений с непрерывной и гладкой вероятностной мерой $d_f = 1$, т.е. d_f равно размерности системы $N = 1$. Для многомерных систем $N \geq 2d_{ef} < N$.

Зная закон распределения (1), (3), вычислим дисперсию $\sigma_r^2(\varepsilon, \vec{x}_0)$ как среднеквадратичное отклонение τ_r от $\langle \tau_r \rangle$:

$$\sigma_r^2 = \langle (\tau_r - \langle \tau_r \rangle)^2 \rangle = \int_0^\infty p(\tau_r) [\tau_r^2 - \langle \tau_r \rangle^2] d\tau_r = \langle \tau_r \rangle^2. \quad (7)$$

Из выражения (2) с учетом (6) для одномерного отображения с хаотическим аттрактором получаем:

$$\langle \tau_r \rangle = [p(x_0)]^{-1} \varepsilon_f^{-d} \quad (8)$$

или

$$\ln \langle \tau_r \rangle = C_1 - d_f \ln \varepsilon. \quad (9)$$

Соответственно для дисперсии получим:

$$\sigma_r^2(x_0, \varepsilon) = \langle \tau_r \rangle^2 = [p(x_0)]^{-2} \varepsilon^{-2d_f} \quad (10)$$

или

$$\ln \sigma_r^2(x_0, \varepsilon) = C_2 - 2d_f \ln \varepsilon. \quad (11)$$

Из (9) и (11) следует, что для одномерного отображения с гладкой вероятностной мерой зависимости $\ln \langle \tau_r \rangle$ и $\ln \sigma_r^2(x_0, \varepsilon)$ от величины $\ln \varepsilon$ будут прямые линии с наклоном -1 и -2 соответственно, сдвинутые относительно нуля координат на постоянные величины C_1 и C_2 , так как в этом случае $d_f = 1$.

На рис. 1 приведены данные численного эксперимента, проведенного для одномерного отображения

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) + \sqrt{2D} \xi(n) \quad (12)$$

при значениях параметров $\lambda = 4$ и $D = 0$, где D — интенсивность внешнего белого шума $\xi(n)$.

Как видно из графика (рис. 1, *b*), действительно, рассчитанные зависимости как для $\langle \tau_r \rangle$, так и для дисперсии $\sigma_r^2(x_0, \varepsilon)$ от $\ln \varepsilon$ представляют собой прямые с наклоном $|k| = 1.008$ и $|k| = 2.0208$, что с учетом ошибки счета полностью соответствует теории (9) и (11) при условии $d_f = 1$.

Данные рис. 1 служат одновременно подтверждением того, что распределение $p(\tau_r)$ (1), с помощью которого получены выражения (9) и (11), является справедливым, включая теорему Каца (5).

Теперь поставим вопрос, как изменятся описанные закономерности в условиях воздействия шума на систему (12), т.е. в случае $D > 0$? Здесь необходимо проанализировать влияние шума на закон (1), теорему Каца (5) и соответственно на вид зависимостей (9) и (11). Отметим,

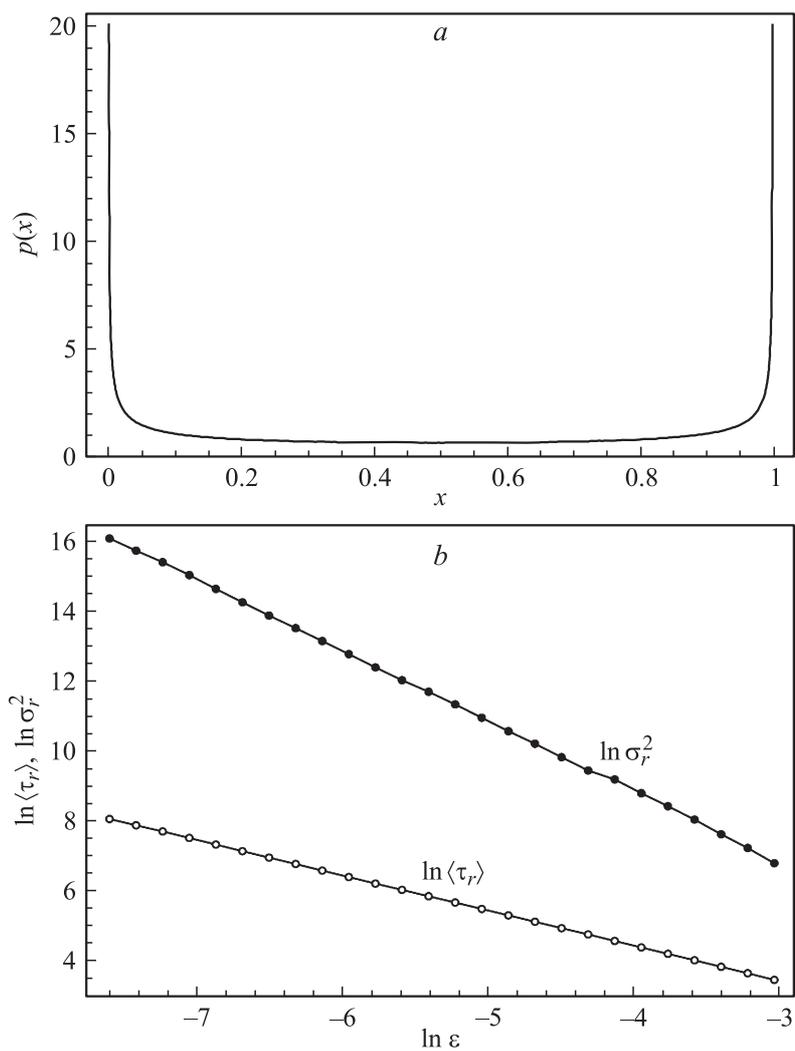


Рис. 1. *a* — плотность распределения $p(x)$ на аттракторе системы (12), которая соответствует аналитическому выражению $p(x) = (\pi\sqrt{x(1-x)})^{-1}$. *b* — зависимости $\ln \langle\tau_r\rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$. Наклоны этих зависимостей -1.008 и -2.0208 соответственно. Значения параметров $\lambda = 4, D = 0, x_0 = 0.5$.

что ряд ответов на поставленные вопросы приведен в работах [3,4], которые мы будем использовать.

Как отмечалось в работе [5], главным фактором является изменение вероятностной меры аттрактора, обусловленное действием шума. На рис. 2 приведены данные расчета плотности распределения $p(x)$ для аттрактора системы (12) при $\lambda = 4$ и $D = 10^{-3}$. Сравнение результатов рис. 2 и 1, а показывает, что $p(x)$ в присутствии шума существенно меняется. В результате будет изменяться и величина вероятности попадания траектории в ε -окрестность начального состояния x_0 (6):

$$P(\varepsilon, x_0, D = 0) \neq P(\varepsilon, x_0, D > 0). \quad (13)$$

Теорема Каца будет справедливой и для зашумленной системы [5], однако в выражении (2) необходимо использовать величину $P(\varepsilon, x_0, D)$ с учетом ее изменений, обусловленных действием шума. Аналогично в [6] необходимо использовать плотность $P(x, D)$ для зашумленной системы:

$$P(\varepsilon, x_0, D) = p(x_0, D)\varepsilon^{d_f}. \quad (14)$$

Таким образом, теорема Каца для зашумленной системы принимает вид ($\gamma = 1$):

$$\langle \tau_r \rangle = \frac{1}{p(x_0, D)} \varepsilon^{-d_f}. \quad (15)$$

Естественно предположить, что и распределение $p(\tau_r)$ (1) останется справедливым, если входящий в (1) коэффициент $\langle \tau_r \rangle$ будет рассчитан с учетом влияния шума на соотношение (15):

$$p(\tau_r) = \frac{1}{\langle \tau_r(D) \rangle} \exp\left(-\frac{\tau_r}{\langle \tau_r(D) \rangle}\right). \quad (16)$$

Если предположить, что закон (16) выполняется, то выражения (9) и (11) для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 также будут справедливы, причем влияние шума приведет лишь к изменениям коэффициентов C_1 и C_2 , а линейная зависимость от $\ln \varepsilon$ сохранится, как и величина наклонов d_f и $2d_f$. Как показано в [5], в случае зашумленных систем $d_f = N$. Рассуждения и выводы, приведенные выше, не являются строгим доказательством, но могут быть проверены с помощью численного эксперимента. Рассмотрим результаты экспериментов. На рис. 3 приведены данные расчета плотности распределения $p(\tau_r)$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$.

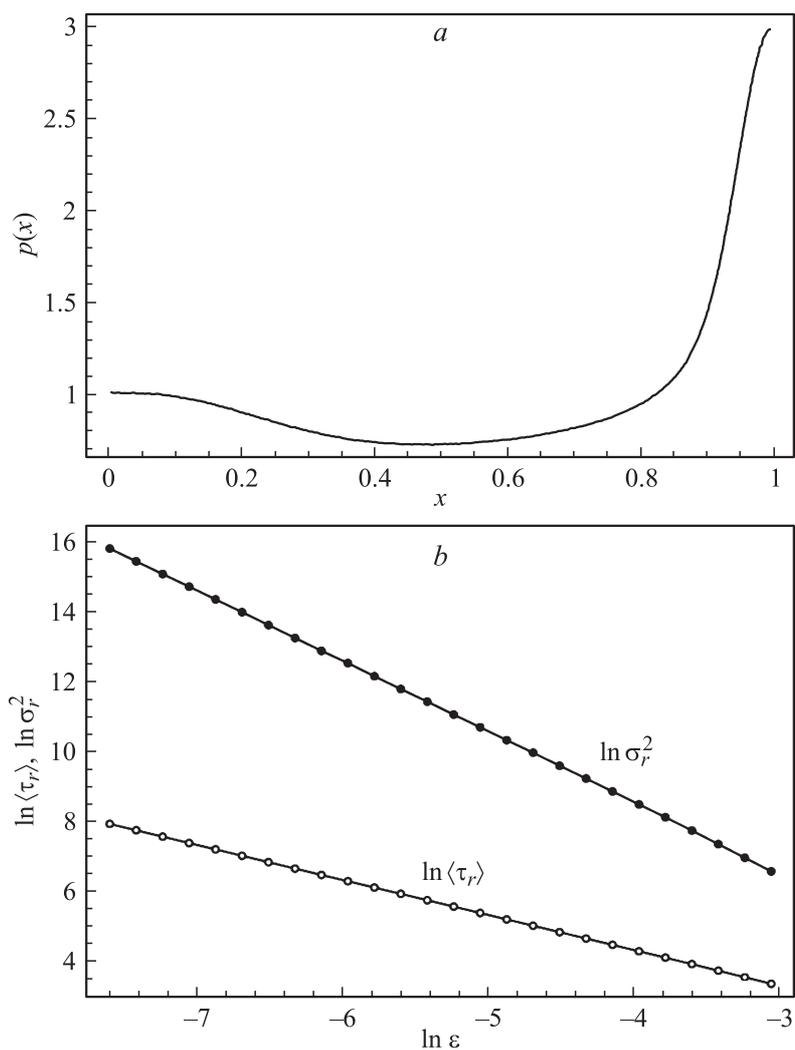


Рис. 2. *a* — плотность $p(x)$ аттрактора системы (12) при $\lambda = 4$, $D = 10^{-3}$.
b — зависимость $\ln \langle\tau_r\rangle$ и $\ln \sigma_r^2$ от $\ln \varepsilon$ для зашумленной системы (12) при $\lambda = 4$, $D = 10^{-3}$. Наклоны этих зависимостей -1.005 и -2.0267 соответственно.

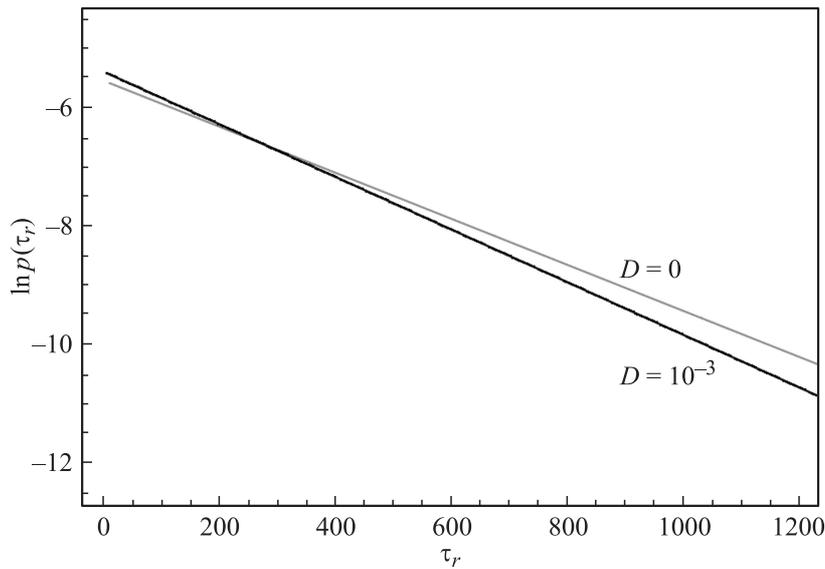


Рис. 3. Результаты аппроксимации данных расчета плотности распределения $p(\tau_r)$ при $\varepsilon = 0.006$ для случаев $D = 0$ и $D = 10^{-3}$. Наклоны -0.0039677 (тогда $\langle \tau_r \rangle = 252$) и -0.0044424 (тогда $\langle \tau_r \rangle = 225.1$) соответственно.

Как видно из графиков, экспоненциальный характер зависимостей $p(\tau_r)$ имеет место как в отсутствие шума, так и при его ненулевом уровне $D = 10^{-3}$. Более того, в обоих случаях наклон прямых $\ln(\tau_r)$ от τ_r строго соответствует величине $k = -\frac{1}{\langle \tau_r \rangle}$. В зашумленной системе $\langle \tau_r \rangle$ уменьшается за счет возрастания вероятности $P(x_0, \varepsilon, D) > P(x_0, \varepsilon, D = 0)$, что приводит к увеличению наклона графика (рис. 3) для зашумленной системы. Таким образом, экспоненциальный закон распределения (1) оказывается справедливым и в случае зашумленной системы (12), если учесть в выражении (1) величины $\langle \tau_r \rangle$ (16). Если это так, то можно ожидать, что графики, представленные на рис. 1, *b* для случая $D = 0$, будут качественно совпадать с графиками для $\langle \tau_r \rangle$ и σ_r^2 , рассчитанными для зашумленной системы (12). Расчеты этот факт подтвердили; на рис. 2, *b* соответствующие результаты расчета приведены.

Основной вывод работы можно сформулировать следующим образом: воздействие шума на режим хаотического аттрактора динамической системы приводит к изменениям в характере плотности распределения $p(x)$. Если это обстоятельство корректно учесть, то из приведенных результатов следует, что теорема Каца и экспоненциальный закон распределения времен возврата $p(\tau_r)$ оказываются справедливы и в случае аддитивного шумового воздействия на систему.

Список литературы

- [1] *Hirata Massaki, Saussol Benoît, Vaienti Sandro.* // Comm. in Math. Phys. 1999. V. 206. P. 33–55.
- [2] *Кас М.* Lectures in Applied Mathematics. London: Interscience, 1957.
- [3] *Анищенко В.С., Хайрулин М.Е.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 12. С. 35–43.
- [4] *Anishchenko V.S., Khairulin M., Strelcova G., Kurths J.* // Eur. Phys. J. B. 2011. V. 82. P. 219–225.
- [5] *Анищенко В.С., Астахов С.В., Боев Я.И., Куртс Ю.* // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 1. С. 29–41.