

09

## **Механизм усложнения зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в двумерном отображении**

© А.А. Короновский, А.Е. Храмова

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
ГосУНЦ „Колледж“  
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru

*Поступило в Редакцию 21 января 2003 г.*

Рассматриваются механизмы, приводящие к усложнению вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно) при изменении управляющих параметров. Показано, что вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий для устойчивого цикла определяется его мультипликаторами. При изменении управляющих параметров в рамках одного динамического режима происходит бифуркация, приводящая к перезамыканию устойчивого и неустойчивого многообразий, следствием чего является качественное усложнение вида зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Исследование нелинейных динамических систем привлекает к себе в последние десятилетия большой интерес со стороны исследователей. При этом, как правило, независимо от того, изучаются ли динамические системы с дискретным или непрерывным временем, с сосредоточенными или распределенными параметрами, основной интерес исследователей вызывают установившиеся режимы колебаний и то, каким образом происходит смена этих режимов при изменении управляющих параметров системы [1,2]. При этом переходные процессы в большинстве случаев рассматриваются как нечто второстепенное, не вызывающее особого интереса. В то же самое время следует отметить, что переходный процесс несет информацию о системе и в ряде случаев оказывается более целесообразным рассматривать поведение системы,

находящейся именно в стадии переходного процесса [3–5], а не тогда, когда система вышла на аттрактор.

Следует также отметить, что круг задач, „примыкающих“ к исследованию переходных процессов, достаточно широк: это исследование строения бассейнов притяжения сосуществующих аттракторов и их границ в случае мультистабильности [6,7], изучение явления переходного хаоса [8,9], которое возникает при кризисе хаотического аттрактора [10,11] и которое по своей сути также является переходным процессом, определение времени ожидания изображающей точки в малой окрестности фазового пространства системы при управлении хаосом [12–14]. Таким образом, переходные процессы играют важную роль в понимании поведения динамических систем и требуют детального изучения. В качестве объектов исследования переходных процессов выбираются, как правило, динамические системы с дискретным временем, в силу того что, с одной стороны, они относительно просты, а с другой стороны, в них имеют место основные нелинейные явления, свойственные потоковым и распределенным динамическим системам.

Ранее в работе [16] были изучены переходные процессы в двумерной динамической системе с дискретным временем (отображении Эно [17])

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n(1 - x_n) + by_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

при наиболее простом динамическом режиме — устойчивом цикле периода один.

Зависимость длительности переходного процесса от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  в отображении Эно (1) при заданных начальных условиях с наперед заданной точностью  $\varepsilon$  определялась также, как это делалось в работах [15,16,18,19]. В работе [16] был выявлен механизм усложнения зависимости длительности переходных процессов от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  в отображении Эно для цикла периода один. Было показано, что определяющее влияние на вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  оказывают мультипликаторы  $\mu_{1,2}$  устойчивой неподвижной точки и устойчивое и неустойчивое многообразие устойчивой и неустойчивой точек. В частности, было показано, что для рассматриваемого динамического режима минимумы длительности переходных процессов совпадают с точками того устойчивого многообразия устойчивой неподвижной точки, которое соответствует наименьшему по модулю значению мультипликатора.

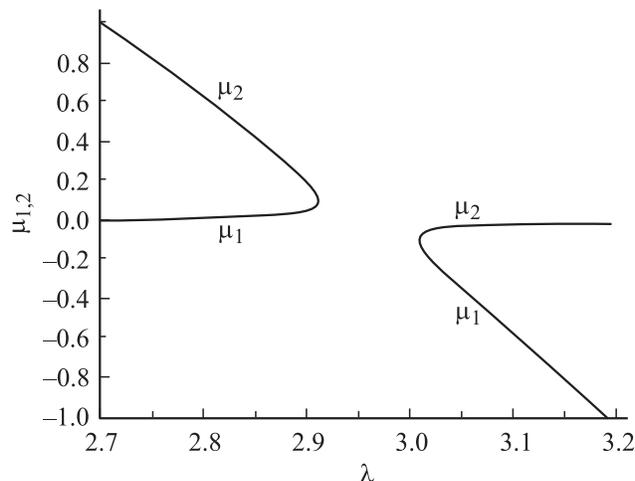
Первоначально при малых значениях параметров  $\lambda$  и  $b > 0$  имеет место соотношение  $|\mu_1| < |\mu_2|$ , минимумы зависимости длительности переходного процесса от начальных условий соответствуют многообразию, характеризующемуся отрицательным мультипликатором  $\mu_1$ . При  $\lambda = \lambda_{eq}$ , когда  $|\mu_1| = |\mu_2|$ , оба многообразия становятся „равноправными“, а при  $\lambda > \lambda_{eq}$  величина  $|\mu_2|$  становится меньше, чем  $|\mu_1|$ , многообразия меняются ролями и минимальные значения переходных процессов располагаются уже вдоль многообразия, характеризующегося положительным мультипликатором  $\mu_2$ , что приводит к усложнению характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий.

Целью настоящей работы является дальнейшее изучение того, как изменяется зависимость длительности переходных процессов от начальных условий в отображении Эно (1), находящемся в более сложных периодических динамических режимах. Из бифуркационного анализа отображения (1) следует, что при значениях управляющих параметров  $3(1-b) < \lambda < 1-b + \sqrt{6-8b+6b^2}$  на плоскости  $(x, y)$  существуют две неустойчивые точки  $(0, 0)$ ,  $(x^0, y^0)$  ( $x^0 = y^0 = (\lambda + b - 1)/\lambda$ ) и устойчивый цикл периода два с элементами  $(x^1, y^1)$ ,  $(x^2, y^2)$ :

$$\begin{aligned} x^1 &= \frac{1 + \lambda - b + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2}}{2\lambda}, \\ y^1 &= -\frac{-1 - \lambda + b + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2}}{2\lambda}, \\ x^2 &= -\frac{-1 - \lambda + b + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2}}{2\lambda}, \\ y^2 &= \frac{1 + \lambda - b + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(b-1) - 3(b-1)^2}}{2\lambda}, \end{aligned} \quad (2)$$

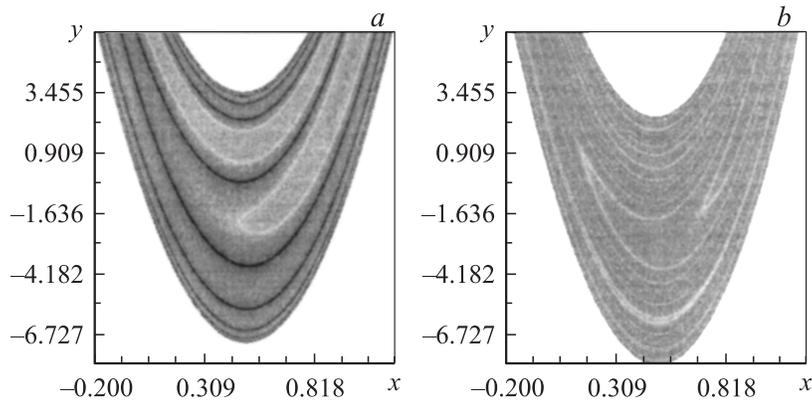
характеризующийся мультипликаторами

$$\begin{aligned} \mu_1^{2c} &= \frac{4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2 - \sqrt{-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2}}{2}, \\ \mu_2^{2c} &= \frac{4 - \lambda^2 + 2\lambda(1-b) - 6b + 4b^2 + \sqrt{-4b^2 + (-4 + \lambda^2 + 2\lambda(b-1) + 6b - 4b^2)^2}}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$



**Рис. 1.** Зависимость значений мультипликаторов  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  от управляющего параметра  $\lambda$  при значении параметра  $b = 0.1$ . Область разрыва соответствует области комплексных значений мультипликаторов.

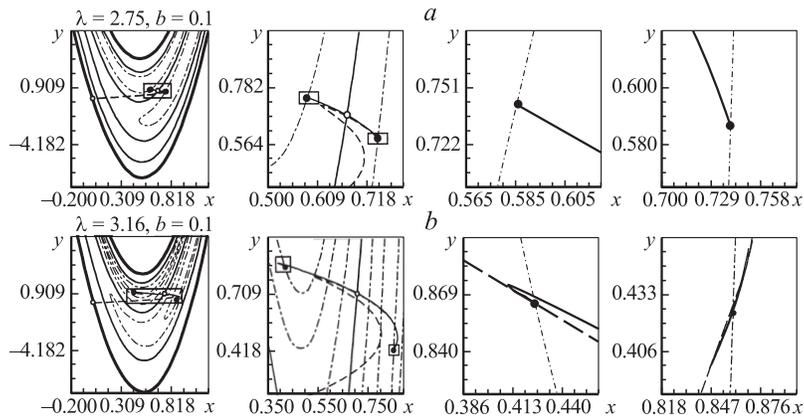
На рис. 1 приведены графики зависимости мультипликаторов  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  от управляющего параметра  $\lambda$  при фиксированном значении параметра  $b = 0.1$ . Комплексные значения мультипликаторов (при  $2.91246 < \lambda < 3.0095$ ) образуют на рис. 1 область разрыва. При значениях параметра  $\lambda = 2.91246$  и  $\lambda = 3.0095$ , соответствующих границам области разрыва, значения мультипликаторов  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  совпадают. Из рис. 1 видно, что при  $\lambda < 2.91246$  мультипликатор  $\mu_1^{2c}$ , принимающий положительные значения, близкие к нулю, с увеличением значения параметра  $\lambda$  возрастает и стремится к 0.1. В то же самое время мультипликатор  $\mu_2^{2c}$  принимает положительные значения, начиная с 1, и с ростом  $\lambda$  уменьшается, стремясь к тому же значению 0.1. Таким образом, в рассматриваемой области значений  $2.7 < \lambda < 2.91246$  мультипликатор  $\mu_1^{2c}$  меньше по модулю мультипликатора  $\mu_2^{2c}$ . После области разрыва, в точке  $\lambda = 3.0095$  значения мультипликатора  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  равны  $-0.1$ . При  $\lambda > 3.0095$  наименьшим по абсолютному значению становится мультипликатор  $\mu_1^{2c}$ . Мультипликатор  $\mu_1^{2c}$  при увеличении параметра  $\lambda$  от 3.0095 до 3.1935



**Рис. 2.** Проекция поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  на плоскость возможных состояний  $(x, y)$  для отображения Эно при значениях управляющих параметров:  $\lambda = 2.75$ ,  $b = 0.1$  (a);  $\lambda = 3.16$ ,  $b = 0.1$  (b). Градациями серого показана длительность переходных процессов: белый цвет соответствует нулевой длительности переходного процесса, черный — двумстам единицам дискретного времени. Светло-серый цвет точек вне бассейна притяжения цикла периода два соответствует начальным условиям, имеющим аттрактор на бесконечности.

стремится к  $-1$ . Для области  $2.91246 < \lambda < 3.0095$  мультипликаторы  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  являются комплексно-сопряженными и удовлетворяют соотношению  $|\mu_1^{2c}| = |\mu_2^{2c}|$ .

При сопоставлении проекций поверхности  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  на плоскость начальных условий  $(x_0, y_0)$  (рис. 2, a, b) с расположением устойчивых многообразий (рис. 3, a, b) устойчивого цикла периода два (2) отчетливо прослеживается картина, аналогичная описанной в работе [16]: минимумы длительности переходных процессов совпадают с тем многообразием, которое соответствует наименьшему по модулю мультипликатору (светлые линии на рис. 2, a, b). Темная линия, соответствующая максимальным значениям длительностей переходных процессов, совпадает с устойчивым многообразием неустойчивого цикла периода один. В то же самое время видно, что при  $\lambda > 3.0095$  вид зависимости длительности переходных процессов от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  существенно более сложный, что выражается в появлении бесконечного числа мини-



**Рис. 3.** *a* — схематическое изображение многообразий, неустойчивых неподвижных точек  $(0; 0)$  и  $(x^0; y^0)$ , а также элементов цикла периода два при фиксированном значении управляющего параметра  $b = 0.1$  и значениях параметра  $\lambda = 2.75$ . Мультипликаторы 2-цикла для рассматриваемых значений параметров имеют следующие значения:  $\mu_1^{2c} = 0.0123$  и  $\mu_2^{2c} = 0.815$ . Толстой сплошной линией схематически показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки  $(0; 0)$ , пунктирной линией — неустойчивое многообразие этой же точки. Тонкой сплошной линией показано устойчивое многообразие неподвижной неустойчивой точки  $(x^0; y^0)$ . Вторая тонкая сплошная линия, проходящая через неподвижную неустойчивую точку  $(x^0; y^0)$  и элементы цикла периода два (заполненные черные кружки), является неустойчивым многообразием точки  $(x^0; y^0)$ . Штрихпунктирными линиями показано устойчивое многообразие 2-цикла, характеризующееся наибольшим по модулю мультипликатором  $\mu_2^{2c}$ . На последующих картинках последовательно показаны увеличенные фрагменты расположения многообразий около неподвижных точек и элементов 2-цикла. *b* — схематичное изображение многообразий, неустойчивых неподвижных точек  $(0; 0)$  и  $(x^0; y^0)$ , а также элементов цикла периода два при фиксированном значении управляющего параметра  $b = 0.1$  и значениях параметра  $\lambda = 3.16$ . Мультипликаторы 2-цикла для рассматриваемых значений параметров имеют следующие значения:  $\mu_1^{2c} = -0.846$  и  $\mu_2^{2c} = -0.012$ . Штрихпунктирными линиями показано устойчивое многообразие 2-цикла, характеризующееся наибольшим по модулю мультипликатором  $\mu_1^{2c}$ . На последующих картинках последовательно показаны увеличенные фрагменты расположения многообразий около неподвижных точек и элементов 2-цикла. На двух последних фрагментах пунктирной линией показано расположение второго устойчивого многообразия цикла периода два, соответствующего мультипликатору  $\mu_2^{2c}$ .

мумов, накапливающихся к устойчивому многообразию неустойчивого цикла периода один.

Для объяснения этого явления, аналогично работе [16], обратимся к поведению многообразий неустойчивых точек и устойчивого цикла периода два. Устойчивое многообразие неустойчивой точки  $(0; 0)$  образует границу бассейна притяжения аттрактора. Неустойчивое многообразие неустойчивой точки  $(0; 0)$  асимптотически стремится к неустойчивой неподвижной точке  $(x^0, y^0)$  вдоль неустойчивого многообразия неустойчивой неподвижной точки  $(x^0, y^0)$  и не оказывает сколь угодно значительного влияния на характер зависимости длительности переходных процессов от начальных условий  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$ .

В силу того что неустойчивое многообразие точки  $(0; 0)$  бесконечное число раз пересекает устойчивое многообразие точки  $(x^0, y^0)$  в ее окрестности, устойчивое многообразие точки  $(x^0, y^0)$  также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие точки  $(0; 0)$  в окрестности этой точки (см. [16]). Как уже говорилось выше, устойчивому многообразию точки  $(x^0, y^0)$  на проекции поверхности  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  на плоскость начальных условий  $(x_0, y_0)$  соответствуют максимумы длительности переходных процессов (темная линия на рис. 2, а).

Неустойчивое многообразие неустойчивой точки  $(x^0, y^0)$  стремится к каждому из элементов устойчивого цикла периода два (2) по направлению устойчивого многообразия 2-цикла, которое характеризуется бóльшим по модулю мультипликатором, т.е. тому, по которому осуществляется более медленная сходимость к аттрактору (рис. 3, а, б). При значениях управляющего параметра  $2.7 < \lambda < 2.91246$  поведение неустойчивого многообразия неустойчивой точки  $(x^0, y^0)$  вблизи каждого из элементов устойчивого 2-цикла обуславливается мультипликатором  $\mu_2^{2c}$ , а при  $3.0095 < \lambda < 3.1935$  — мультипликатором  $\mu_1^{2c}$ . Для области значений управляющего параметра  $2.91246 < \lambda < 3.0095$  мультипликаторы цикла периода два становятся комплексно-сопряженными, а следовательно, для устойчивого 2-цикла не существует многообразий. В силу этого зависимость длительности переходных процессов от начальных условий имеет два ярко выраженных минимума, совпадающих с элементами устойчивого цикла периода два. Максимальная длительность переходных процессов по-прежнему соответствует начальным условиям, принадлежащим устойчивому многообразию неустойчивой точки  $(x^0, y^0)$ .

Как видно из рис. 1, при  $2.7 < \lambda < 2.91246$  мультипликаторы  $\mu_1^{2c}$  и  $\mu_2^{2c}$  являются положительными, а при  $3.0095 < \lambda < 3.1935$  мульти-

пликаторы принимают отрицательные значения. Таким образом, при  $3.0095 < \lambda < 3.1935$  неустойчивое многообразие точки  $(x^0, y^0)$  бесконечное число раз пересекает устойчивые многообразия устойчивого 2-цикла, характеризующиеся отрицательными мультипликаторами, „наматываясь“ на неподвижную точку. Как следствие, в окрестности неустойчивой точки  $(x^0, y^0)$  устойчивое многообразие цикла периода два, характеризующееся наибольшим по модулю мультипликатором  $\mu_1^{2c}$ , также бесконечное число раз пересекает неустойчивое многообразие неустойчивой точки  $(x^0, y^0)$ , что приводит к появлению бесконечного числа минимумов на проекции поверхности  $T_\varepsilon(x_0, y_0)$  (рис. 3, *b*). Аналогичный механизм приводит к усложнению характера зависимости длительности переходных процессов от начальных условий в рамках одного динамического режима для циклов периода четыре, восемь и т.д.

Итак, переходные процессы минимальной длительности в динамических системах с дискретным временем соответствуют начальным условиям  $(x_0, y_0)$ , принадлежащим устойчивому многообразию устойчивого цикла, которое характеризуется наибольшим по модулю мультипликатором (при этом значения мультипликаторов должны быть действительными). В тот момент, когда при изменении управляющих параметров (в рамках одного динамического режима) наибольший по модулю мультипликатор устойчивого цикла становится отрицательным, происходит перестройка и усложнение структуры поверхности зависимости длительности переходных процессов от начальных условий. При этом подобное усложнение, связанное с „обменом ролями“ мультипликаторов, может быть связано с выходом значений мультипликаторов в комплексную плоскость, как это происходит для циклов периода два, четыре и т.д. отображения Эно, либо с тем, что значение одного мультипликатора по модулю уменьшается, а другого увеличивается, при этом оба мультипликатора остаются действительными, как это происходит для неподвижной устойчивой точки (см. [16]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 01–02–17392).

## Список литературы

- [1] Venkatesan A., Lakshmanan M. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58 (3). P. 3008.
- [2] Depassier M.C., Mura J. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056217.
- [3] Кальянов Э.В. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26 (15). С. 26–31.

- [4] *Bezruchko V.P., Dikanev T.V., Smirnov D.A.* // Phys. Rev. E. 64. 2001. P. 036210.
- [5] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // Докл. РАН. 2002. Т. 383 (3). С. 322–325.
- [6] *Pisarchik A.N.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 046203.
- [7] *De Morua A.P.S., Grebogi C.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2778.
- [8] *Dhamala M. et al.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056207.
- [9] *Zhu L. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86 (18). P. 4017.
- [10] *Szabo K.G. et al.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 61 (5). P. 5019.
- [11] *Stewart H.B. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75 (13). P. 2478.
- [12] *Meucci R. et al.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 52 (5). P. 4676.
- [13] *Aston P.J., Marriot P.K.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 57 (1). P. 1181.
- [14] *Raar V., Buljan H.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62 (4). P. 4869.
- [15] *Астахов А.В. и др.* // Радиофизика и электроника. 1993. Т. 38 (2). С. 291.
- [16] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28 (15). С. 61–68.
- [17] *Хенон М.* Странные аттракторы / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.
- [18] *Короновский А.А., Храмов А.Е., Стародубов А.В.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (5). С. 25–30.
- [19] *Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е., Храмова А.Е.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. XLV (10). С. 880–886.