01;03

Постановка граничных условий на обтекаемых разреженным газом искривленных поверхностях

 В.Н. Попов

Поморский государственный университет, Архангельск
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

Поступило в Редакцию 17 марта 2003 г.

На примере задачи об обтекании потоком разреженного газа твердой сферической поверхности показана необходимость учета барнеттовской поправки к функции распределения при постановке граничных условий на обтекаемых потоком разреженного газа искривленных поверхностях.

К настоящему времени в печати опубликован ряд работ [1–8], посвященных построению точных аналитических решений неоднородных модельных кинетических уравнений в граничных задачах кинетической теории разреженных газов, связанных с обтеканием потоком неоднородного по температуре и массовой скорости разреженного газа искривленных поверхностей. Использование точных аналитических методов позволило уточнить значения ряда коэффициентов, учитывающих влияние кривизны поверхности на скорость скольжения, полученных ранее приближенными методами в [9–11]. Вместе с тем открытым остался вопрос о том, как результаты [1–8] соотносятся с аналогичными результатами [12,13]. Исследованию данной проблемы и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим сферическую поверхность, обтекаемую стационарным потоком разреженного газа. В качестве граничного условия на поверхности сферы выберем модель диффузного отражения. Введем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром частицы, а полярная ось направлена вдоль массовой скорости газа вдали от поверхности. В выбранной системе координат кинетическое уравнение Больцмана с линеаризованным оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гресс, Крук) модели записывается в виде

$$C_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big[C_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\frac{\partial f}{\partial C_r}$$
$$+ \left(C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta\right)\frac{\partial f}{\partial C_\theta} - \left(C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi\right)\frac{\partial f}{\partial C_\varphi}\Big]$$
$$= k^{-1}\Big[f^0(\mathbf{r},\mathbf{C})\iiint K(\mathbf{C},\mathbf{C}')f(\mathbf{r},\mathbf{C}')d\mathbf{C}' - f(\mathbf{r},\mathbf{C})\Big].$$

Здесь $\beta^{-1/2}\mathbf{C}$ — размерная скорость молекул газа, $L\mathbf{r}$ — размерный радиус-вектор, L — характерный размер обтекаемого тела (для сферы L совпадает с ее радиусом), $f^0(\mathbf{r},\mathbf{C}) = (\beta/\pi)^{3/2}\exp(-C^2)$ — абсолютный максвеллиан, $\beta = m/2k_BT_0$, k_B — постоянная Больцмана, m — масса молекул газа, $k = 2\pi^{-1/2}\,\mathrm{Kn}$, $\mathrm{Kn} = l/L$ — число Кнудсена, l — средняя длина свободного пробега молекул газа, связанная с кинематической вязкостью газа ν соотношением $\nu = l(2kT/\pi m)^{1/2}$, $f(\mathbf{r},\mathbf{C})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям,

$$K(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{2}{3}\Big(C^2 - \frac{3}{2}\Big)\Big(C'^2 - \frac{3}{2}\Big).$$

Полагая отклонение состояния разреженного газа от равновесного малым, линеаризуем $f(\mathbf{r},\mathbf{C})$ относительно абсолютного максвеллиана

$$f(\mathbf{r},\mathbf{C}) = f^0(\mathbf{r},\mathbf{C})\big[1 + \Psi(\mathbf{r},\mathbf{C})\big].$$

Здесь $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{C})$ удовлетворяет уравнению

$$C_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r}\Big[C_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} + \left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\frac{\partial \Psi}{\partial C_r}$$
$$+ \left(C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta\right)\frac{\partial \Psi}{\partial C_\theta} - \left(C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi\right)\frac{\partial \Psi}{\partial C_\varphi}\Big]$$
$$= k^{-1}\Big[\pi^{-3/2}\iiint \exp(-C'^2)K(\mathbf{C},\mathbf{C}')\Psi(\mathbf{r},\mathbf{C}')d\mathbf{C}' - \Psi(\mathbf{r},\mathbf{C})\Big]. \quad (1)$$

Учитывая, что отношение правой части уравнения (1) к левой имеет порядок Kn^{-1} для построения его решения в объеме газа можно использовать метод последовательных приближений. Представим $\Psi(\mathbf{r},\mathbf{C})$

в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = 1 + 2C_r U_r^{(0)} + 2C_\theta U_\theta^{(0)} + \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\tau^{(0)} + k\psi_{Ch}(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + k^2\psi_B(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + \dots \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k, находим

$$\begin{aligned}\psi_{Ch}(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = {} & p^{(1)} + 2C_r U_r^{(1)} + 2C_\theta U_\theta^{(1)} - 2C_r^2 \frac{\partial U_r^{(0)}}{\partial r} - \frac{2C_\theta^2}{r}\frac{\partial U_\theta^{(0)}}{\partial \theta} \\ & - 2C_r C_\theta S_{r\theta}^{(0)} - \frac{2}{r}(C_\theta^2 + C_\varphi^2)U_r^{(0)} - \frac{2C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r} U_\theta^{(0)} \\ & + \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\left[\tau^{(1)} - C_r \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial r} - \frac{C_\theta}{r}\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta}\right],\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\psi_B(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = {} & p^{(2)} + 2C_r U_r^{(2)} + 2C_\theta U_\theta^{(2)} - C_r\frac{\partial p^{(1)}}{\partial r} - 2C_r^2\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial r} - 2C_r C_\theta \frac{\partial U_\theta^{(1)}}{\partial r} \\ & + 2C_r^3 \frac{\partial^2 U_r^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{2C_r C_\theta^2}{r}\frac{\partial^2 U_\theta^{(0)}}{\partial r \partial \theta} + 2C_r^2 C_\theta \frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + \frac{6C_r}{r}\left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\frac{\partial U_r^{(0)}}{\partial r} \\ & - \frac{2C_r}{r^2}(C_\theta^2 + C_\varphi^2)U_r^{(0)} - \frac{C_\theta}{r}\frac{\partial p^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2C_r C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r}\left(\frac{\partial U_\theta^{(0)}}{\partial r} - \frac{U_\theta^{(0)}}{r}\right) \\ & - \frac{2C_r C_\theta}{r}\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2C_\theta}{r^2}\left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\frac{\partial U_r^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{2C_\theta^2}{r}\frac{\partial U_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{2C_r^2 C_\theta}{r}\frac{\partial^2 U_r^{(0)}}{\partial r \partial \theta} \\ & + \frac{2C_\theta^3}{r^2}\frac{\partial^2 U_\theta^{(0)}}{\partial \theta^2} + \frac{2C_r C_\theta^2}{r}\frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{6C_\theta}{r^2}\left(C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta\right)\frac{\partial U_\theta^{(0)}}{\partial \theta} \\ & - \frac{2}{r}\Bigg[\left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\left[U_r^{(1)} - C_\theta S_{r\theta}^{(0)}\right] + \left(C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_r C_\theta\right)\Big[U_\theta^{(1)} - C_r S_{r\theta}^{(0)} \\ & - \frac{2C_\theta}{r}U_r^{(0)}\Big] + \frac{2C_\varphi}{r}\left(C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_r C_\varphi\right)\left[U_r^{(0)} + U_\theta^{(0)} \operatorname{ctg}\theta\right]\Bigg] \\ & - \left(C^2 - \frac{5}{2}\right)\Bigg[C_r\frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial r} + \frac{C_\theta}{r}\frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \theta} - C_r^2\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r^2} - 2C_r C_\theta \frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta} \\ & - \frac{C_\theta^2}{r^2}\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial \theta^2} + \frac{2C_r C_\theta}{r^2}\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\left(C_\theta^2 + C_\varphi^2\right)\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial r} - \frac{C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta}\Bigg].\end{aligned} \tag{4}$$

Соотношения (2)–(4) определяют в барнеттовском приближении решение уравнения (1):

$$S_{r\theta}^{(i)} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial\theta} + \frac{\partial U_\theta^{(i)}}{\partial r} - \frac{U_\theta^{(i)}}{r}.$$

Построенная функция распределения удовлетворяет уравнению (1), однако она не удовлетворяет граничному условию на поверхности сферы. Для того чтобы это граничное условие выполнялось, представим функцию распределения в виде

$$f = f^0\big[1 + \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C})\big].$$

Здесь $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ учитывает отклонение функции распределения в слое Кнудсена (тонком пристеночном слое газа, непосредственно прилегающем к обтекаемой поверхности, толщина которого порядка средней длины свободного пробега молекул газа) от функции распределения в объеме газа. Для ее построения перейдем к новому масштабу в конфигурационном пространстве. Переопределим безразмерную кординату так, чтобы размерный радиус-вектор был равен $(2/\sqrt{\pi})l\mathbf{r}$, где l — средняя длина свободного пробега молекул газа (новую безразмерную координату снова обозначим через r). При таком способе обезразмеривания обратный безразмерный радиус сферы $R^{-1} = 2\pi^{-1/2}\,\mathrm{Kn} = k$, а для нахождения $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ получим уравнение

$$C_r\frac{\partial Y}{\partial r} + k\bigg[C_\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} + \big(C_\theta^2 + C_\varphi^2\big)\frac{\partial Y}{\partial C_r}$$

$$+ \big(C_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta\big)\frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - \big(C_\varphi C_\theta\operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi\big)\frac{\partial Y}{\partial C_\varphi}\bigg]$$

$$= \pi^{-3/2}\iiint\exp(-C'^2)K(\mathbf{C}, \mathbf{C}')Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}')d\mathbf{C}' - Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}).$$

Раскладывая далее $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ в ряд по степеням k,

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = kY_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + k^2Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + \ldots,$$

и учитывая диффузный характер взаимодействия молекул газа с поверхностью, находим

$$Y_1(\mathbf{R}, \mathbf{C}) = -\psi_{Ch}(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad Y_2(\mathbf{R}, \mathbf{C}) = -\psi_B(\mathbf{R}, \mathbf{C}), \quad \mu > 0.$$

$$Y_1(\infty, \mathbf{C}) = Y_2(\infty, \mathbf{C}) = 0.$$

В задачах скольжения [2] ($\mu = C_r$)

$$Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = C_\theta(C_\theta^2 + C_\varphi^2 - 2)Z_0(r, \mu) + C_\theta Z_1(r, \mu),$$

$$Y_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = C_\theta Z_2(r, \mu) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(C_\theta, C_\varphi)\omega_j(r, \mu),$$

где $g_j(C_\theta, C_\varphi)$ образуют с C_θ полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов.

Тогда, учитывая результаты, полученные в [2,5], вычисление скорости скольжения разреженного газа вдоль поверхности сферы сводится к решению системы уравнений

$$\mu \frac{\partial Z_0}{\partial r} + Z_0(r, \mu) = 0,$$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial r} + Z_1(r, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(r, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau,$$

$$\mu \frac{\partial Z_2}{\partial r} + Z_2(r, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_2(r, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau$$

$$+ \mu Z_1(r, \mu) - 2 \frac{\partial Z_1}{\partial \mu} + 4\mu Z_0(r, \mu) - 2 \frac{\partial Z_0}{\partial \mu}$$

с граничными условиями

$$Z_1(R, \mu) = -2U_\theta^{(1)} + 2\mu S_{r\theta}^{(0)} + \left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta}, \quad \mu > 0,$$

$$Z_2(R, \mu) = -2U_\theta^{(2)} + 2\mu S_{r\theta}^{(1)} + 2\left(\mu^2 - \frac{1}{2}\right)\left[S_{r\theta}^{(0)} - \frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}\right.$$

$$\left. - \mu \frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta} + \mu \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau^{(1)}}{\partial \theta}\right], \quad \mu > 0,$$

$$Z_0(R, \mu) = 0, \quad \mu > 0; \qquad Z_0(\infty, \mu) = Z_1(\infty, \mu) = Z_2(\infty, \mu) = 0.$$

Учитывая результаты, полученные в [2,5,6], выражения для $U_\theta^{(1)}$ и $U_\theta^{(2)}$ находим из условий

$$\int_0^\infty \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} Z_1(R,\mu)\mu\exp(-\mu^2)d\mu = 0, \tag{5}$$

$$\int_0^\infty \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\Bigg[\bigg[Z_2(R,\mu) + \Big[(2\mu - C_T)\Big(\mu^2 - \frac{1}{2}\Big) + C_n\Big]\frac{\partial^2\tau^{(0)}}{\partial r\partial\theta}$$

$$- 2\mu(\mu^2 + Q_2)\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta}\bigg]\mu\exp(-\mu^2) - 2[\mu a(\mu)]'\Bigg]d\mu = 0. \tag{6}$$

Последние три слагаемых в (6) получены в работах о тепловом скольжении второго порядка [6] и о влиянии кривизны поверхности на значения коэффициентов теплового [2] и изотермического [5] скольжений, $a(\mu)$ — коэффициенты в разложении по векторам непрерывного спектра решения задачи об изотермическом скольжении разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности [5], Q_n — интегралы Лоялки [14], $C_T = 1.30272$ — коэффициент скачка температуры, $C_n = -0.55844$ — коэффициент, найденный в работе о температурном скачке, из условия непроницаемости молекул газа сквозь межфазную поверхность.

Вычисляя входящие в (5) и (6) интегралы, после преобразований находим

$$U_\theta^{(1)} = -Q_1 S_{r\theta}^{(0)} - \frac{1}{2}\left(Q_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta} = 1.01619 S_{r\theta}^{(0)} + 0.38316\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta},$$

$$U_\theta^{(2)} = -Q_1 S_{r\theta}^{(1)} + \left(Q_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} - \left(Q_2 + \frac{3}{2}\right)S_{r\theta}^{(0)} + \frac{1}{2}C_n\frac{\partial^2\tau^{(0)}}{\partial r\partial\theta}$$

$$+ Q_1\left(Q_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta} = 1.01619 S_{r\theta}^{(1)} - 0.76632\frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}$$

$$- 0.2337 S_{r\theta}^{(0)} - 0.27922\frac{\partial^2\tau^{(0)}}{\partial r\partial\theta} + 0.77872\frac{\partial\tau^{(0)}}{\partial\theta}. \tag{7}$$

При записи (7) учли, что [5], [14]

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\left[\mu a(\mu)\right]' d\mu = -2S_{r\theta}^{(0)},$$

$$Q_1 = -1.01619, \quad Q_2 = -1.26632.$$

Аналогичные выражения в [13] записываются в виде

$$U_\theta^{(1)} = k_0 S_{r\theta}^{(0)} + K_1 \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta},$$

$$U_\theta^{(2)} = k_0 S_{r\theta}^{(1)} + a\frac{\partial S_{r\theta}^{(0)}}{\partial r} + (b+c)S_{r\theta}^{(0)} + (e-f-g)\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta} - e\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta},$$

$$k_0 = 1.01619, \quad K_1 = 0.38316, \quad a = -0.76632, \quad b = 0.50000,$$

$$c = 0.26632, \quad e = 0.27922, \quad f = 0.26693, \quad g = -0.76644.$$

Таким образом, результаты, полученные в настоящей работе, полностью совпадают с аналогичными результатами [12], [13]. Если же при линеаризации функции распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ ограничиться приближением Чепмена–Энсокога, не учитывая в (2) слагаемое $\psi_B(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ (как это сделано в [9–11]), то выражение для $U_\theta^{(2)}$ запишется в виде

$$U_\theta^{(2)} = -\beta_R' \frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta} + [\beta_R - \beta_B]\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta} = -0.5338\frac{\partial \tau^{(0)}}{\partial \theta} - 0.7745\frac{\partial^2 \tau^{(0)}}{\partial r \partial \theta},$$

$$\beta_R = 0.5380503, \quad \beta_R' = 0.5338, \quad \beta_B = 1.3126.$$

Получившееся при таком способе линеаризации функции распределения выражение для $U_\theta^{(2)}$ существенным образом отличается от полученного в [12,13].

Итак, в работе на примере задачи об обтекании потоком разреженного газа твердой сферической поверхности показано, что полученные в [1–8] результаты с учетом барнеттовской поправки к функции распределения приводят к результатам, совпадающим с полученными ранее в [12,13]. При этом все коэффициенты, учитывающие влияние кривизны поверхности на скорость скольжения разреженного газа, за исключением коэффициента перед смешанной производной второго порядка от возмущения температуры выражены через значения двух первых интегралов Лоялки.

Список литературы

[1] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 5. С. 70–74.
[2] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. V. № 3 (11). С. 103–114.
[3] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 3. С. 104–106.
[4] *Попов В.Н.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 10. С. 15–21.
[5] *Попов В.Н.* // ИФЖ. 2002. Т. 75. № 3. С. 107–110.
[6] *Попов В.Н.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 19. С. 10–16.
[7] *Попов В.Н.* // ПМТФ. 2002. № 5. С. 105–113.
[8] *Попов В.Н.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 3. С. 33–40.
[9] *Яламов Ю.И., Поддоскин А.А., Юшканов А.А.* // ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 343–346.
[10] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. № 1. С. 158–161.
[11] *Поддоскин А.Б., Юшканов А.А., Яламов Ю.И.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. № 11. С. 2253–2261.
[12] *Sone Y.* // Rarefied gas dynamics. New York: Academic Press, 1969. V. 1. P. 243–253.
[13] *Sone Y., Aoki K.* // Rarefied gas dynamics. New York, 1977. V. 51. Part 1. P. 417–433.
[14] *Loyalka S.K.* // Transport theory and statistical physics. 1975. V. 4. P. 55–65.