

07

## Дифракция комбинированных оптических вихрей

© А.В. Воляр, Т.А. Фадеева

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,  
Симферополь, Украина

Поступило в Редакцию 28 января 2003 г.

Показано, что процесс дифракции света на линзе гауссова пучка, прошедшего одноосный кристалл, эквивалентен дифракции пучка на геликоидальном фазовом транспаранте двух парциальных пучков с различной кривизной волнового фронта. В результате дифракции гауссов профиль пучка существенно искажается, а в области фокальной плоскости линзы формируется протяженная область с тремя перетяжками пучка. Посредством изменения радиуса перетяжки исходного пучка и радиуса зрачка линзы можно спрямлять область перетяжки.

Уникальное свойство сингулярных пучков захватывать, транспортировать и вращать микрочастицы вещества, размеры которых могут варьироваться от единиц до десятков микрон [1], указывает на наличие эффективной потенциальной ямы, форма и размеры которой могут меняться по мере распространения пучка. Трехмерный фигурный профиль потенциальной ямы позволяет захватывать и структурировать сразу множество микрочастиц [2], формируя из них достаточно сложные пространственные конструкции. Синтез лазерных пучков для таких устройств (которые называют оптическими пинцетами) предполагает использование фазовых транспарантов, существенно изменяющих структуру исходного гауссова пучка. Часто новый пучок ошибочно принимают за гауссов [3]. Вместе с тем фокусировка такого сингулярного

пучка линзой может неизменно изменить форму его потенциальной ямы.

В данной работе в качестве примера были выбраны сингулярные пучки, по составу близкие к тем, которые рассмотрены в работе [3]. Недавно мы уже говорили о возможности получения оптических вихрей за счет пропуска исходного циркулярно поляризованного гауссова пучка с нулевым топологическим зарядом  $l = 0$  через анизотропный кристалл вдоль оптической оси [4]. Если после кристалла поместить четвертьволновую пластинку и анализатор, оси которых составляют угол  $\beta = \pi/4$ , то на оси пучка формируется оптический вихрь с двойным топологическим зарядом. Однако по мере распространения структура пучка начинает изменяться.

Целью данной работы явилось исследование процесса дифракции такого сингулярного пучка после фокусировки с помощью тонкой сферической линзы.

Рассмотрим поле циркулярно поляризованного сингулярного параксиального гауссова пучка, прошедшего одноосный кристалл вдоль его оптической оси  $z$ . Волновая функция такого пучка имеет вид [4]:

$$\Psi_l(r, \varphi, z) = \frac{1}{\xi} \left( \frac{r}{\xi} \right)^{|l|} \exp\left(-\frac{r^2}{\rho^2 \xi}\right) \exp[i l \varphi] \exp(-ikz) \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\xi = 1 + iz/z_0$ ,  $z_0 = k\rho^2/2$  — длина Рэлея,  $\rho$  — радиус перетяжки пучка,  $k$  — волновое число,  $g_x = \cos \delta/2 + i \sin \delta/2 \exp(i\sigma 2\varphi)$ ,  $g_y = i\sigma [\cos \delta/2 - i \sin \delta/2 \exp(i\sigma 2\varphi)]$  — элементы вектора-столбца Джонса,  $\delta = k\Delta n r^2 / \sqrt{r^2 + L^2} \approx 2\alpha r^2$ ,  $\alpha = k\Delta n/2L$  — разность фаз между локальными ортогональными компонентами электрического поля, вызванная анизотропией кристалла,  $\Delta n = n_e - n_0$ ,  $n_e$  и  $n_0$  — необыкновенный и обыкновенный показатели преломления,  $l$  — топологический заряд,  $r$  и  $\varphi$  — радиальная и азимутальная координата соответственно,  $\sigma = \pm 1$  — направление циркуляции электрического вектора (спиральность),  $L$  — толщина кристалла вдоль оси  $z$  (считается, что входная плоскость кристалла совпадает с плоскостью перетяжки пучка  $z = 0$ ). Расположим линзу с фокусным расстоянием  $f$  и радиусом апертуры  $r_0$  на расстоянии  $d$  от входной грани кристалла и рассмотрим процесс фокусировки пучка.

Поле в каждой точке  $(r', \varphi', z)$  пространства за кристаллом для каждой поляризационной компоненты  $\Psi^{(x,y)}$  найдем с помощью

интеграла Кирхгофа [5], так что волновая функция пучка приобретает вид:

$$\begin{aligned} \Psi^{(x,y)}(r', \varphi', z) &= \frac{iA}{\lambda q_2^{|l|+1}} \exp(-ikr'^2/2z) \exp(-ik[z+d]) \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left\{i \frac{kr'}{z} r \cos(\varphi - \varphi')\right\} \int_0^{r_0} dr \left\{ \left[ a_0^{x,y} \cos \alpha r^2 \exp(i l \varphi) \right. \right. \\ &\left. \left. + b_0^{x,y} \sin \alpha r^2 \exp(i \{l + 2\sigma\} \varphi) \right] \exp[-ikr^2(1/q_2 + 1/z)/2] r^{|l|+1} \right\}, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $b = kr'/z$ ,  $a_0^x = 1$ ,  $a_0^y = i\sigma$ ,  $b_0^x = i$ ,  $q_1 = q + d$ ,  $1/q_2 = 1/q_1 - 1/f$ .

Для простоты выберем два наиболее часто встречающихся варианта дифракции: 1) радиус перетяжки пучка значительно меньше радиуса апертуры линзы —  $r_0 \gg \rho$ ,  $\rho \gg \lambda$ ; 2) радиус перетяжки пучка сравним с радиусом апертуры —  $r_0 \propto \rho$ ,  $\rho \gg \lambda$ .

1. В случае свободной фокусировки пучка ( $r_0 \gg \rho$ ) волновую функцию (2) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \Psi_{x,y}^{(l\sigma)}(r', \varphi', z) &= (i)^{|l|+1} \frac{kA}{2q_2^{|l|+1}} \exp(-ikr'^2/2z) \exp(-ik[z+d]) \\ &\times \exp(i l \varphi') \left\{ a_0^{x,y} [D^{(+)}(r', z) + D^{(-)}(r', z)] \right. \\ &\left. + (i)^{2\sigma+1} b_0^{x,y} \exp(i 2\sigma \varphi') [D_{(l\sigma)}^{(+)}(r', z) - D_{(l\sigma)}^{(-)}(r', z)] \right\}, \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_{(l\sigma)}^{\pm} &= \int_0^{\infty} r^{|l|+1} J_{|l+2\sigma|}(br) \exp(-iCr^2) \\ &= 2^{|l|+1} \gamma(|l| + 2, b^2/i4C) / b^{|l|+2}, \quad l\sigma \geq 0, \end{aligned}$$

$$D^{\pm} = \int_0^{\infty} r^{|l|+1} J_{|l|}(br) \exp(-iCr^2) dr = b^{|l|} / [2^{l+1} (iC)^{|l|+1}] \exp[ib^2/4C],$$

знак (+) соответствует  $C = C_1 + \alpha$ ,  $C_1 = k(1/q_2 + 1/z)/2$ , а знак (−) соответствует  $C = C_1 - \alpha$ ,  $\gamma(n, z)$  — неполная гамма-функция,  $J_n(x)$  — функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка.

Если через одноосный кристалл проходит правоциркулярно поляризованный ( $\sigma = +1$ ) фундаментальный гауссов пучок ( $l = 0$ ), на который затем действует четвертьволновая пластинка и поляризатор, как это делалось, например, в работе [4], то в поле пучка можно выделить особые области — оптические вихри, пространственное положение которых зависит от взаимной ориентации осей пластинки и поляризатора. При условии, если оси пластинки и поляризатора составляют угол  $\beta = \pi/4$ , в волновой функции [6] остается только слагаемое при  $b_0$ , и ее можно записать в форме

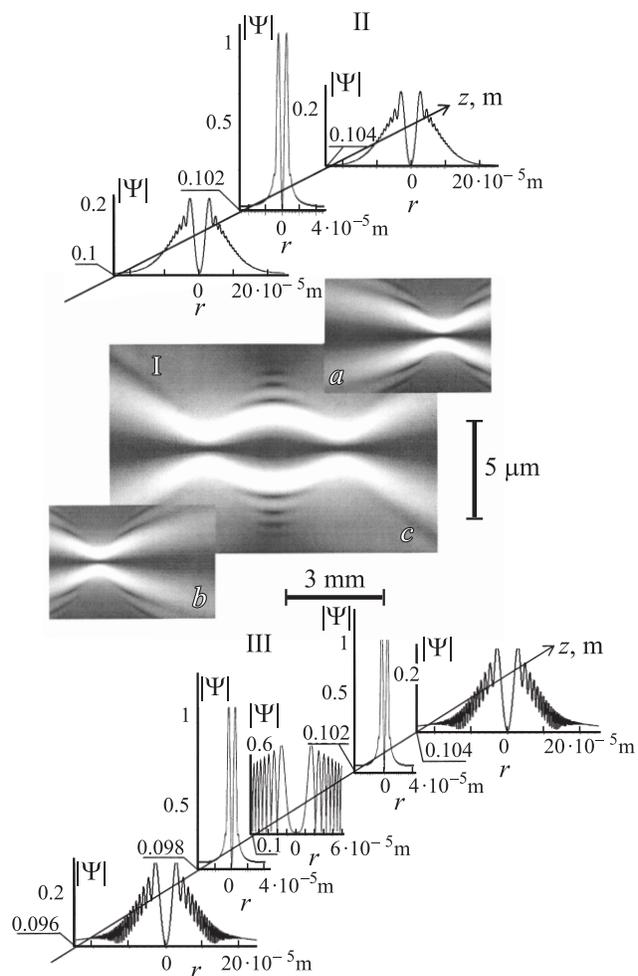
$$\begin{aligned} \Psi^{(0)}(r', \varphi', z) = & 4 \frac{ik}{z} \frac{A}{q_2} \exp[-ik(d+z)] \exp \left[ -i \frac{kr'^2}{2} \frac{q_3 - \frac{\xi^2}{z}}{q_3^2 - \xi^2} \right] \\ & \times \exp(i2\varphi') \left\{ \left[ (B_1 - B_2) + i \frac{z^2}{k^2 r'^2} \right] \exp(-iB) \right. \\ & \left. - \left[ (B_1 + B_2) + i \frac{z^2}{k^2 r'^2} \right] \exp(iB) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \xi = 2\alpha z q_2/k, \quad B_1 = \frac{z q_3 q_2}{2k(q_3^2 - \xi^2)}, \quad B_2 = \frac{\alpha q_2^2 z^2}{k^2(q_3^2 - \xi^2)}, \\ B = \frac{\alpha q_2^2 r'^2}{(q_3^2 - \xi^2)}, \quad q_3 = q_2 + z \end{aligned}$$

и использовалось выражение для неполной гамма-функции  $\gamma(2, x) = 1 - (1+x)e^{-x}$ .

Вблизи оптической оси  $kr' \ll 1$  множитель в фигурных скобках выражения (4) пропорционален квадрату радиуса  $\{\dots\} \propto r'^2$  и соответственно  $\Psi^{(0)} \propto r'^2 e^{i2\varphi'}$ , т.е. вблизи оси, как и в исходной волне, существует оптический вихрь с двойным топологическим зарядом. По мере возрастания радиуса  $r'$  форма исходной гауссовой огибающей волновой функции начинает существенно искажаться. Множитель в фигурных скобках выражения (4) содержит два слагаемых, которые соответствуют вкладу двух пучков, образующих данный комбинированный пучок. В самом деле, дифракционный интеграл (2) фактически содержит две исходные волновые функции, отличающиеся знаком



**Рис. 1.** Дифракция свободного пучка: I — меридиональный срез модуля амплитуды парциального пучка с  $\alpha^+$  (a),  $\alpha^-$  (b) и комбинированного пучка (c); II — эволюция профиля амплитуды парциального пучка с  $\alpha^+$ ; III — комбинированного пучка.

параметра  $\alpha$  в амплитуде и фазе, и поэтому его можно разделить на два интеграла. Каждый из интегралов представляет собой дифракционное преобразование исходного гауссова пучка на фазовом транспаранте с геликоидальным рельефом  $T = \exp(i2\varphi + ikz)$ . Каждый пучок имеет свою собственную кривизну волнового фронта, задаваемую параметром  $\alpha$ . Очевидно, что линза различным образом будет фокусировать эти два пучка. Процесс такой фокусировки иллюстрирует рис. 1. Каждый парциальный пучок фокусируется в некоторой области вблизи плоскости  $z = f$  (рис. 1, I a, b). По мере приближения парциального пучка с  $\alpha^+$  к области перетяжки (рис. 1, II) рябь на кривой модуля амплитуды сменяется гладким поведением огибающей, которая после прохождения перетяжки вновь приобретает осциллирующий характер. При сложении двух пучков комбинированная волна формирует уже два фокуса по разные стороны фокальной плоскости  $z = f$  (рис. 1, I c). На рис. 1, III продемонстрирована эволюция профиля амплитуды комбинированного сингулярного пучка. Примечательно, что система кольцевых дислокаций (тороидальных вихрей) формируется только в фокальной плоскости  $z = f$ , в то время как в плоскостях боковых перетяжек какие-либо фазовые сингулярности поля отсутствуют.

2. В случае сингулярного пучка, обрезанного круговой апертурой линзы ( $r_0 \propto \rho, \rho \gg \lambda$ ), волновая функция приобретает вид

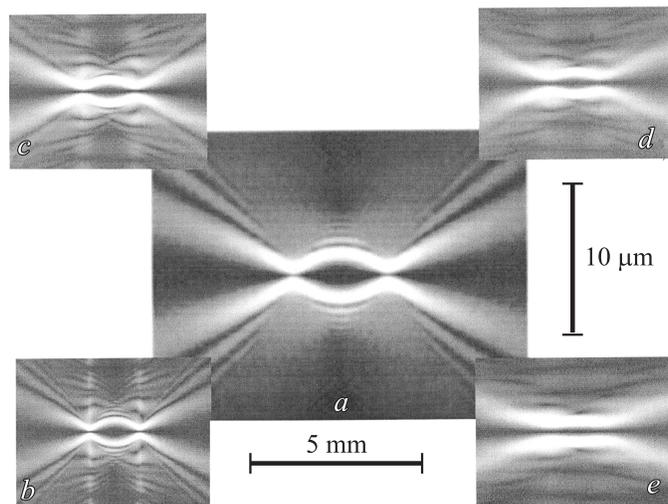
$$\Psi_{x,y} = ikA \exp[ik(z+d)] \exp(-ikr'^2/2z) I_{x,y}^{(b)} \exp(i2\varphi')/q_2, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} I_{x,y}^{(b)} = & -i \left[ \exp\{-i(C_1 + \alpha)r_0^2\} - \exp\{-i(C_1 - \alpha)r_0^2\} \right] J_0(br_0)/b^2 \\ & + [1/b^2 - i(B_1 - B_2)] \{U_1(w^+, u) + iU_2(w^+, u)\} \\ & - [1/b^2 - i(B_1 + B_2)] \{U_1(w^-, u) + iU_2(w^-, u)\}, \end{aligned}$$

$w^\pm = 2(C_1 \pm \alpha)r_0^2$ ,  $u = br_0$ ,  $U_m(w, u)$  — функция Ломмеля двух переменных [6].

Как и в первом случае, на оси пучка присутствует чисто винтовая дислокация. Однако периферийные тороидальные вихри теперь вытеснены из центральной фокальной плоскости новыми тороидальными вихрями, порожденными интерференцией основного пучка и двух дифрагированных краевых волн. Слабые изменения апертуры линзы



**Рис. 2.** Распрямление области перетяжки комбинированного пучка посредством изменения отношения  $r_0/\rho$ :  $a$  —  $r_0/\rho = 10$ ,  $b$  —  $r_0/\rho = 3$ ,  $c$  —  $r_0/\rho = 2$ ,  $d$  —  $r_0/\rho = 1.5$ ,  $e$  —  $r_0/\rho = 1$ .

вызывают цепь дислокационных реакций, приводящих к рождению и уничтожению кольцевых дислокаций и дополнительному искажению формы огибающей. Тем не менее именно эти искажения позволяют управлять формой области перетяжки, что столь важно для сингулярных пучков, используемых в оптических пинцетах. Один из возможных способов „спрямления“ области фокальной перетяжки демонстрирует рис. 2. Мы зафиксировали радиус зрачка линзы  $r_0$  и меняли перетяжку пучка  $\rho$  на ней. В центре картины для сравнения приведен меридиональный срез пучка, когда радиус перетяжки пучка значительно меньше радиуса апертуры. При большой величине отношения  $r_0/\rho$  краевые волны создают замысловатый узор вокруг канала пучка (рис. 2,  $b$ ). По мере уменьшения величины  $r_0/\rho$  совместное действие ближних к оси тороидальных вихрей в плоскости трех перетяжек как бы распрямляет пучок (рис. 2,  $c, d$ ), так что при равенстве радиусов  $r_0 = \rho$  (рис. 2,  $e$ ) пучок почти не расходится на протяжении 3 мм (размер фокального пятна  $\rho_f \approx 3 \mu\text{m}$ ).

Таким образом, мы показали, что, хотя сразу после кристалла сингулярный пучок имеет гауссову форму огибающей, по мере распространения происходит существенное изменение структуры пучка. Вблизи геометрического фокуса образуются три перетяжки, формой которых можно управлять за счет варьирования радиуса пучка на линзе и радиуса ее апертуры. Следует заметить, что результат дифракции не зависит от положения поляризационного фильтра. Смещение фильтра вдоль всей зоны дифракции не изменяет профиль потенциальной ямы.

## Список литературы

- [1] *Heckenberg N.R., Friese M.E.J., Nieminen H. Rubinsztein-Dunlop* // Optical Vortices / Eds M. Vasnetsov and K. Staliunas. New York: Nova Science, 1999.
- [2] *MacDonald M.P., Paterson L., Volke-Sepulveda K., Arlt J., Sibbett W., Dholakia K.* // Science. 2002. V. 296. P. 1101–1103.
- [3] *Ganic D., Gan X., Gu M., Hain M., Somalingam S., Stankovich S., Tschudi Th.* // Opt. Lett. 2002. V. 27. N 15. P. 1351–1353.
- [4] *Воляр А.В., Фадеева Т.А., Егоров Ю.А.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 22.
- [5] *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.
- [6] *Ватсон Г.Н.* Теория бесселевых функций. Ч. I. М.: Иностран. лит., 1949. 798 с.