01

Обоснование метода моментов в теории дифракции

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет
E-mail: tel@novsu.ac.ru
theorphy@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 11 марта 2003 г.

Данная работа посвящена вопросам обоснования метода моментов. Доказано, что многие уравнения дифракции имеют структуру, которая обеспечивает сходимость приближенных решений к точным. Показано, что операторы дифракционных задач можно представить в виде суммы положительных и вполне непрерывных операторов.

1. Постановка задачи. Задача дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей поверхности описывается уравнением вида

$$Lj = e, \tag{1}$$

где L — линейный интегральный или интегродифференциальный оператор, при этом интегрирование проводится по поверхности дифракции; j — плотность поверхностного тока; e — первичное электрическое поле на поверхности дифракции.

Для решения уравнения (1) наряду с аналитическими методами широко применяются численные методы, например метод моментов.

Сформулируем метод моментов. Для этого возьмем две системы функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$, которые являются полными в некотором функциональном пространстве.

Разложим неизвестную функцию по базису

$$j = \sum_{m=1}^{N} C_m \varphi_m, \tag{2}$$

подставим в (1) и затем обе части полученного соотношения умножим на ψ_n в пространстве L_2. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} C_m(L\varphi_m, \psi_n) = (e, \psi_n), \quad 1 \leqslant n \leqslant N. \tag{3}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает умножение в L_2, т. е. умножение с последующим интегрированием.

Решив систему (3), найдем неизвестные коэффициенты C_m и по формуле (2) приближенное значение плотности тока, соответствующее заданному числу N. Такова суть метода моментов. Когда $\psi_n = \varphi_n$ имеем метод Галеркина.

С помощью метода моментов к настоящему времени решено огромное количество дифракционных задач [1–4]. Важно отметить, что в приведенных книгах практически не рассматривались вопросы обоснования численных методов, сходимости приближенных решений к точным решениям.

Разработка численных методов решения интегральных уравнений дифракции оказалась несравненно более легкой задачей, чем обоснование численных методов. Обоснование численных методов требует глубокого изучения структуры интегральных уравнений.

Целью данной работы является обоснование метода моментов для широкого круга дифракционных задач.

2. Уравнение дифракции H-поляризации на полосе. Сведение к интегральному уравнению второго рода. Уравнение дифракции H-поляризации на полосе можно записать в виде [5]

$$Lj \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\tilde{j}(\xi)\exp(-ix\xi)d\xi = e(x), \tag{4}$$

где $\tilde{j}(\xi)$ — преобразование Фурье неизвестной функции, т. е.

$$\tilde{j}(\xi) = \int_{-e}^{e} j(x')\exp(ix'\xi)dx'. \tag{5}$$

Интегрирование в (5) проводится по ширине полосы. И наконец, функция $f(\xi)$ имеет вид

$$f(\xi) = \sqrt{\xi^2 - k^2}, \tag{6}$$

где k — волновое число. Для лаконичности при записи уравнения (4) все постоянные отнесены к правой части.

К виду (4) также приводится задача дифракции электромагнитных волн на отрезке кругового цилиндра, вибратора [6]. При этом $f(\xi)$ выражается через функции Бесселя. Для дальнейшего изложения важно отметить лишь асимптотическое поведение. Оно оказывается таким же, как и у функции (6), а именно

$$f(\xi) - |\xi| \to 0, \quad \text{при } \xi \to \pm\infty. \tag{7}$$

В соответствии с (7) представим оператор L в виде суммы двух операторов

$$Lj \equiv Aj + Bj = e, \tag{8}$$

где

$$Aj = \int \sqrt{\xi^2 + 1}\, \tilde{j}(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi, \tag{9}$$

$$Bj = \int \left(f(\xi) - \sqrt{\xi^2 + 1} \right) \tilde{j}(\xi) \exp(-ix\xi) d\xi. \tag{10}$$

В (9) и (10) интегрирование проводится по всей прямой, далее будем опускать пределы интегрирования.

Остановимся на свойствах оператора A. Оператор A является положительным в L_2, так как

$$(Aj, j) = \int \sqrt{\xi^2 + 1}\, |\tilde{j}(\xi)|\, d\xi.$$

На самом деле оператор A не только положительный, но и положительно определенный в пространстве L_2 [6,7]. Так как оператор A положительный, он имеет обратный A^{-1}. Умножая обе части (8) на A^{-1}, получим

$$j + A^{-1}B = A^{-1}e. \tag{11}$$

Уравнение (11) будем рассматривать в энергетическом пространстве положительно определенного оператора A, которое совпадает [7] с пространством Соболева–Слободецкого $\overset{\circ}{H}_{1/2}$.

На основании асимптотики (7) удается доказать, что оператор $A^{-1}B$ является вполне непрерывным в пространстве $\overset{\circ}{H}_{1/2}$. Следовательно, уравнение (11) является уравнением Фредгольма второго рода. Поэтому к уравнению (11) можно применить метод моментов.

Подставим (2) в (11) и затем обе части полученного соотношения умножим на ψ_n в пространстве $\overset{\circ}{H}_{1/2}$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} C_m[\varphi_m, \psi_n] + \sum_{m=1}^{N} (B\varphi_m, \psi_n) = (e, \psi_n), \quad 1 \leqslant n \leqslant N, \tag{12}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — скалярное произведение в $\overset{\circ}{H}_{1/2}$, которое определяется по формуле

$$[u, v] = (Au, v). \tag{13}$$

Используя фредгольмовость уравнения (11) можно доказать, что при больших N система (12) имеет единственное решение, а приближенное решение, найденное по формуле (2), сходится к точному решению уравнения (11). При этом функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ должны быть полными именно в пространстве $\overset{\circ}{H}_{1/2}$.

В теории дифракции функции φ_n обычно выбирают таким образом, чтобы они описывали точно свойства решения. Выбором же ψ_n можно облегчить вычисление матричных элементов системы (12).

Из определения операторов A и B следует, что система (3), полученная в результате применения метода моментов к исходному уравнению, в точности совпадает с системой (12), которая получена в результате применения метода моментов к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. На основании этого удается математически строго обосновать метод моментов.

Хотя выделение оператора A неоднозначно, но энергетическое пространство определяется однозначно уравнением (1). В этом проявляется замечательное свойство уравнений теории дифракции. Функциональное пространство полностью определяется оператором уравнения, и не может быть никакого произвола в выборе пространства решений.

3. Уравнение дифракции E-поляризации на полосе. Сведение к интегральному уравнению второго рода. Уравнение дифракции E-поляризации, когда токи текут параллельно краю полосы, имеет вид [5]

$$Lj \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\tilde{j}(\xi)\exp(-ix\xi)d\xi = e(x), \tag{14}$$

где $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - k^2}}$.

В уравнении (14) выделим главный положительный оператор

$$Lj = Aj + Bj = e, \tag{15}$$

где

$$Aj = \int \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}}\,\tilde{j}(\xi)\exp(-ix\xi)d\xi, \tag{16}$$

$$Bj = \int \left(f(\xi) - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+1}} \right) \tilde{j}(\xi)\exp(-ix\xi)d\xi. \tag{17}$$

Отметим свойства оператора A. Он является лишь положительным, но не положительно определенным, если рассматривать в пространстве L_2.

По этой причине энергетическое пространство оказывается шире, чем L_2. Известно, что энергетическое пространство совпадает с пространством Соболева–Слободецкого $\overset{\circ}{H}_{1/2}$ [7]. Оператор A как положительный оператор имеет обратный A^{-1}. Умножая обе части уравнения (15) на A^{-1}, получим

$$j + A^{-1}Bj = A^{-1}e. \tag{18}$$

Можно показать, что оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен в энергетическом пространстве оператора A, т. е. в пространстве $\overset{\circ}{H}_{1/2}$. Оператор A^{-1} теперь является неограниченным, поэтому потребуем, чтобы e принадлежал области определения оператора A^{-1}. В результате уравнение (18) оказывается уравнением Фредгольма второго рода.

К уравнению (18), как уравнению Фредгольма второго рода, можно применить метод моментов в энергетическом пространстве оператора. В результате получим такую же систему линейных алгебраических уравнений, какую получили бы в результате применения метода моментов исходному уравнению в пространстве L_2. Тем самым имеем полное обоснование метода моментов.

Таким образом, в основе обоснования метода моментов в задачах дифракции E- и H-поляризации лежит выделение главного положительного оператора и сведение уравнения к уравнению Фредгольма второго рода.

Этот подход применим к задачам дифракции на цилиндрической криволинейной поверхности, на поверхности вращения, а также к задачам дифракции на периодических структурах.

Перечисленные задачи относятся к скалярным задачам. Следующий параграф посвящен векторной задаче дифракции электромагнитных волн на плоской поверхности.

3. Уравнение дифракции электромагнитных волн на плоском экране. Сведение к уравнению Фредгольма второго рода. Дифракция электромагнитных волн описывается в этом случае векторным уравнением вида

$$L\mathbf{j} = \mathbf{e}, \tag{19}$$

где L — линейный интегральный оператор, $\mathbf{e}$ — первичное электрическое поле на экране, $\mathbf{j}$ — плотность поверхностных токов, наведенных на обеих сторонах экрана.

Сформулируем метод моментов. Для этого выберем две системы вектор-функций $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ и $\{\boldsymbol{\psi}_n\}$. Разложим неизвестную вектор-функцию по базису

$$\mathbf{j} = \sum_{m=1}^{N} C_m \boldsymbol{\varphi}_m, \tag{20}$$

подставим в уравнение (19) и умножим на $\boldsymbol{\psi}_n$ в пространстве $L_2 \oplus L_2$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{N} C_m (L\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\varphi}_n) = (\mathbf{e}, \boldsymbol{\varphi}_n), \tag{21}$$

где $(\cdot,\cdot)$ означает умножение в $L_2 \oplus L_2$, т. е. скалярное умножение и затем интегрирование по поверхности экрана S.

Теперь приведем векторное уравнение дифракции электромагнитных волн на плоском экране. Оно имеет вид [8]

$$L\mathbf{j} = \iint \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 - k^2}} \left(-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\mathbf{j}}) + k^2\tilde{\mathbf{j}}\right) \exp\left(-i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\right) d\boldsymbol{\xi}_1 d\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{e}, \tag{22}$$

где $\mathbf{j}\,(j_1(x_1,x_2), j_2(x_1,x_2))$ — плотность поверхностных токов, $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi} = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$, а $\tilde{\mathbf{j}}\,(\tilde{j}_1(\xi_1,\xi_2), \tilde{j}_2(\xi_1,\xi_2))$ — преобразование Фурье, взятое от плотности, т. е.

$$\tilde{j}_1(\xi_1,\xi_2) = \iint\limits_S j_i(x_1,x_2) \exp(ix_1\xi_1 + ix_2\xi_2) dx_1 dx_2, \quad i = 1, 2.$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности экрана.

Каким условиям должна удовлетворять граница области? Для доказательства непрерывности встречающихся здесь операторов достаточно, чтобы граница удовлетворяла условию Лифшица. Это обстоятельство позволяет рассматривать не только области с гладкой границей, но также прямоугольные экраны.

Введем в рассмотрение оператор

$$A\mathbf{j} = \iint \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2+1}} \left(\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\mathbf{j}}) + \tilde{\mathbf{j}}\right) \exp\left(-i(\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\xi})\right) d\xi_i d\xi_2. \qquad (23)$$

Оператор A является положительным, поэтому можно определить энергетическое пространство H этого оператора. Скалярное произведение в H определяется по формуле

$$[\mathbf{j},\mathbf{j}] = (A\mathbf{j},\mathbf{j}) = \iint \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2+1}} \left(|\boldsymbol{\xi}\cdot\tilde{\mathbf{j}}|^2 + |\tilde{\mathbf{j}}|^2\right) d\xi_1 d\xi_2. \qquad (24)$$

В работе [8] доказано, что пространство H разлагается в прямую сумму подпространств H_1 и H_2 с условиями

$$H_1 = \left\{\mathbf{j}\in H : \xi_1\tilde{j}_1 + \xi_2\tilde{j}_2 = 0\right\},$$

$$H_2 = \left\{\mathbf{j}\in H : \xi_2\tilde{j}_1 - \xi_1\tilde{j}_2 = 0\right\}.$$

Умножим обе части (22) на A^{-1}

$$K\mathbf{j} \equiv A^{-1}L\mathbf{j} = A^{-1}\mathbf{e} \qquad (25)$$

и рассмотрим это векторное уравнение в энергетическом пространстве H.

Нетрудно показать, что когда $\mathbf{u}_i \in H_i$, $\mathbf{v}_j \in H_j$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ и если $i \neq j$, то верно соотношение

$$[Ku_i, v_j] = 0. \qquad (26)$$

Соотношение (26) означает, что подпространства H_1 и H_2 являются инвариантными подпространствами оператора K. Поэтому уравнение (25) разбивается на два независимых уравнения

$$K\mathbf{j}_i = \mathbf{f}_i, \qquad i = 1, 2, \qquad (27)$$

где $\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$, $A^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, $\mathbf{j}_1 \in H_1$, $\mathbf{j}_2 \in H_2$, $\mathbf{f}_1 \in H_1$, $\mathbf{f}_2 \in H_2$.

Когда $\mathbf{j}_1 \in H_1$, $\mathbf{v}_1 \in H_1$, выделяя положительный оператор, получим

$$[K\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1] = [A^{-1}L\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1] = (L\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_1) = \iint \frac{k^2}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 - k^2}} \tilde{\mathbf{j}}_1 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_1 \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \iint \frac{k^2}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1}} \tilde{\mathbf{j}}_1 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_1 \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \iint \left(\frac{k^2}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 - k^2}} - \frac{k^2}{\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1}} \right) \tilde{\mathbf{j}}_1 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_1 \, d\xi_1 d\xi_2. \tag{28}$$

Далее выделим главный положительный оператор во втором уравнении $\mathbf{j}_2 \in H_2$, $\mathbf{v}_2 \in H_2$:

$$[-K\mathbf{j}_2, \mathbf{v}_2] = -[A^{-1}L\mathbf{j}_2, \mathbf{v}_2] = -(L\mathbf{j}_2, \mathbf{v}_2) = \iint \sqrt{|\xi|^2 - k^2} \, \tilde{\mathbf{j}}_2 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_2 \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$= \iint \sqrt{|\xi^2| + 1} \, \tilde{\mathbf{j}}_2 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_2 \, d\xi_1 d\xi_2$$

$$+ \iint \left(\sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 + k^2} - \sqrt{|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1} \right) \tilde{\mathbf{j}}_2 \cdot \bar{\tilde{\mathbf{v}}}_2 \, d\xi_1 d\xi_2. \tag{29}$$

Используя представления (28) и (29), можно доказать, что уравнения (27) эквивалентны уравнениям Фредгольма второго рода.

Применяя к уравнениям Фредгольма второго рода метод моментов, получим систему линейных алгебраических уравнений, которая совпадает с другой системой, получаемой в результате применения метода моментов к исходному уравнению. Тем самым получено обоснование метода моментов и для векторной задачи дифракции.

Список литературы

[1] *Вычислительные* методы в электродинамике / Пер. с англ. Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977.

[2] *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982.

[3] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984.

[4] *Васильев Е.Н.* Возбуждение тел вращения. М.: Радио и связь, 1987.

[5] *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39. № 1. С. 23–31.
[6] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 12. С. 2160–2168.
[7] *Эминов С.И.* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2001. Т. 41. № 3. С. 450–458.
[8] *Смирнов Ю.Г.* // Дифференциальные уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 136–143.