01;03

О влиянии собственного заряда нелинейно осциллирующей капли на внутреннее резонансное взаимодействие мод

 С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 4 марта 2003 г.

Малость расстройки частот резонансно взаимодействующих мод капиллярных осцилляций заряженной капли, вызванной варьированием собственного заряда капли в докритическом по Рэлею диапазоне зарядов, является причиной слабой чувствительности резонансного взаимодействия к величине собственного заряда капли.

1. Исследование резонансного взаимодействия мод нелинейно осциллирующей заряженной капли представляет интерес в связи с многочисленными приложениями, и в частности в связи с проблемой исследования закономерностей инициирования разряда молнии [1–2].

Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности нелинейно осциллирующей в вакууме капли идеальной, несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ, коэффициентом поверхностного натяжения γ и электрическим зарядом Q, распределенным по ее поверхности. В начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли с радиусом R претерпевает осесимметричное возмущение фиксированной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли. Согласно [3–5], при нелинейных осцилляциях такой капли возникают условия для резонансного обмена энергией между модами осцилляций, что может привести к сильной деформации капли, перераспределению заряда по ее поверхности и зажиганию коронного разряда в ее окрестности при собственных зарядах, много меньших предельного в смысле устойчивости по Рэлею. Зададимся целью исследовать влияние величины заряда на закономерности реализации резонансного взаимодействия мод.

Математическая формулировка решаемой задачи полностью эквивалентна использованной при анализе нелинейных осцилляций заряженной капли в вакууме в работах [3–7], и здесь мы ее приводить не будем ввиду ограниченности места. Отметим лишь, что форма образующей осесимметричной поверхности осциллирующей капли ищется в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \gamma = 1$ в виде разложения по малому параметру ε, характеризующему амплитуду начальной деформации сферической формы. Аналитическое выражение для образующей в сферических координатах в квадратичном приближении по ε ищется в виде

$$r(\theta, t) \quad 1 + \varepsilon\left\{\sum_{i\in\Theta} M_i^{(1)}(t)\cdot P_i(\mu)\right\}$$

$$+\varepsilon^2\left\{\sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t)\cdot P_n(\mu)\right\} + O(\varepsilon^3). \qquad (1)$$

Θ – спектр мод, определяющих начальную деформацию капли; $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра; $\mu \equiv \cos(\theta)$.

Решение задачи методом многих масштабов приводит к следующим дифференциальным уравнениям в частных производных для определения коэффициентов разложения (1):

$$\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2\cdot M_n^{(2)}(T_0, T_1) = -2i\omega_n\cdot\frac{dA_n^{(1)}(T_1)}{dT_1}\cdot\exp[i\omega_n T_0]$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\Big\{[\gamma_{lmn} + \omega_l\cdot\omega_m\cdot\eta_{lmn}]\,A_l^{(1)}(T_1)\cdot A_m^{(1)}(T_1)$$

$$\times\exp[i(\omega_l+\omega_m)T_0] + [\gamma_{lmn} - \omega_l\cdot\omega_m\cdot\eta_{lmn}]\,A_l^{(1)}(T_1)$$

$$\times\overline{A_m^{(1)}(T_1)}\cdot\exp[i(\omega_l-\omega_m)T_0]\Big\} + \text{к. с.}; \qquad (3)$$

$$T_0 \equiv t; \quad T_1 \equiv \varepsilon t; \quad \omega_n^2 \equiv n(n-1)\big[(n+2) - W\big]; \quad W \equiv \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\gamma_{ijn} \equiv K_{ijn}\Big[\omega_i^2(n-i+1) + 2n\big[j(j+1) - 1\big]$$

$$+ \big(j(i+1) - i(2i-2n+7) + 3\big)n\,\frac{W}{2}\Big] + \alpha_{ijn}\left[\frac{1}{i}\,\omega_i^2 + n\,\frac{W}{2}\right];$$

$$\eta_{ijn} \equiv K_{ijn}\left(\frac{n}{2} - i + 1\right) + \alpha_{ijn}\,\frac{1}{i}\left(1 + \frac{n}{2j}\right);$$

$$K_{ijn} \equiv \big[C_{i0j0}^{n0}\big]^2; \qquad \alpha_{ijn} \equiv -\sqrt{i(i+1)j(j+1)}\,C_{i0j0}^{n0}C_{i(-1)j1}^{n0};$$

C_{i0j0}^{n0} и $C_{i(-1)j1}^{n0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [8], которые отличны от нуля, только если нижние индексы удовлетворяют следующим соотношениям:

$$|i-j| \leqslant n \leqslant (i+j); \quad i+j+n = 2g \quad (g\ -\ \text{целое число}).$$

Решением уравнений (2) являются гармонические функции с коэффициентами, зависящими от времени T_1:

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = a_n^{(1)}(T_1)\cdot\exp[ib_n^{(1)}(T_1)]\cdot\exp[i\omega_n T_0] + \text{к. с}$$

Аббревиатура „к. с.“ обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; горизонтальная черта сверху означает комплексное сопряжение; $a_n^{(1)}(T_1)$ и $b_n^{(1)}(T_1)$ — вещественные функции, зависимость которых от времени T_1 может быть определена только при рассмотрении задачи второго порядка малости, т. е. уравнения (3).

2. Из вида правой части (3) можно заметить, что если для каких-либо трех мод колебаний с номерами p, q, k выполняется одно из соотношений: $\omega_p + \omega_q = \omega_k$ или $\omega_p - \omega_q = \omega_k$, то эти моды вступают в резонансное взаимодействие. Пусть индекс n нумерует моды, возбуждающиеся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, а индексы k, p, q нумеруют моды, связанные резонансным взаимодействием.

При анализе уравнения (3) для мод с $n = k,\ p,\ q$, чтобы отразить близость комбинации частот $\omega_p \pm \omega_q$ к частоте ω_k, введем параметр расстройки $\sigma \sim O(1)$, определяемый соотношением

$$\omega_p \pm \omega_q = \omega_k(1 + \varepsilon\sigma).$$

Отметим, что параметр расстройки можно связать с величиной собственного заряда капли (с величиной параметра W), имея в виду, что, варьируя заряд капли, можно изменять частоту осцилляций, уводя ее от положения точного резонанса.

Из соображений простоты и экономии места рассмотрим случай вырожденного резонанса, т. е. когда справедливо соотношение вида

$$\omega_k = 2\omega_p.$$

Проводя анализ резонансного взаимодействия по аналогии с тем, как было сделано в [5], для временны́х коэффициентов первого порядка малости k- и p-й мод в разложении (1) несложно найти

$$M_k^{(1)}(t) = 2a_k^{(1)}(\varepsilon t)\cdot\cos\left[2\omega_k t - \beta_k^{(1)}(\varepsilon t)\right];$$

$$M_p^{(1)}(t) = 2a_p^{(1)}(\varepsilon t)\cdot\cos\left[\omega_p t + b_p^{(1)}(\varepsilon t)\right]; \tag{4}$$

где вещественные функции $a_k^{(1)}(\varepsilon t)$, $\beta_k^{(1)}(\varepsilon t)$, $a_p^{(1)}(\varepsilon t)$, $b_p^{(1)}(\varepsilon t)$ являются решениями системы дифференциальных уравнений:

$$4\omega_k\,\frac{da_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = \Lambda_{ppk}^{(+)}\cdot\left[a_p^{(1)}(T_1)\right]^2\cdot\sin\left[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)\right]; \tag{5}$$

$$4\omega_k\cdot a_k^{(1)}(T_1)\cdot\frac{d\beta_k^{(1)}(T_1)}{dT_1} = 4\omega_k^2\cdot a_k^{(1)}(T_1)\cdot\sigma$$

$$+\,\Lambda_{ppk}^{(+)}\cdot\left[a_p^{(1)}(T_1)\right]^2\cdot\cos\left[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)\right];$$

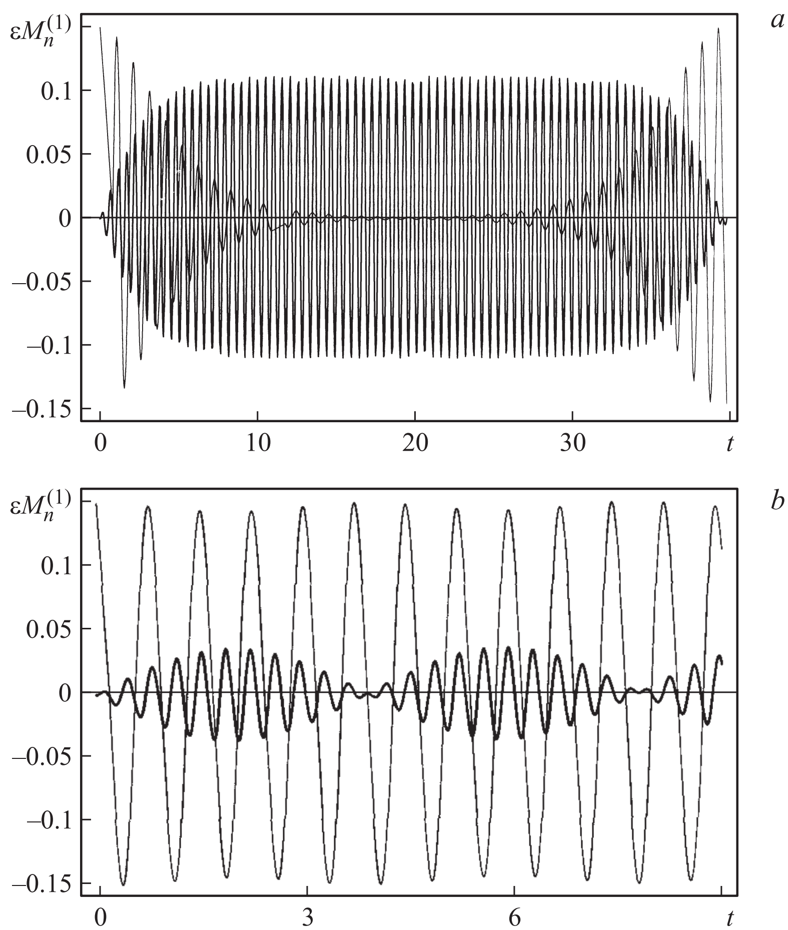
$$2\omega_p\,\frac{da_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kpp}^{(-)}\cdot a_k^{(1)}(T_1)\cdot a_p^{(1)}(T_1)\cdot\sin\left[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)\right];$$

$$2\omega_p\cdot a_p^{(1)}(T_1)\cdot\frac{db_p^{(1)}(T_1)}{dT_1} = -\Lambda_{kpp}^{(-)}\cdot a_k^{(1)}(T_1)\cdot a_p^{(1)}(T_1)\cdot\cos\left[\varphi_{kp}^{(1)}(T_1)\right];$$

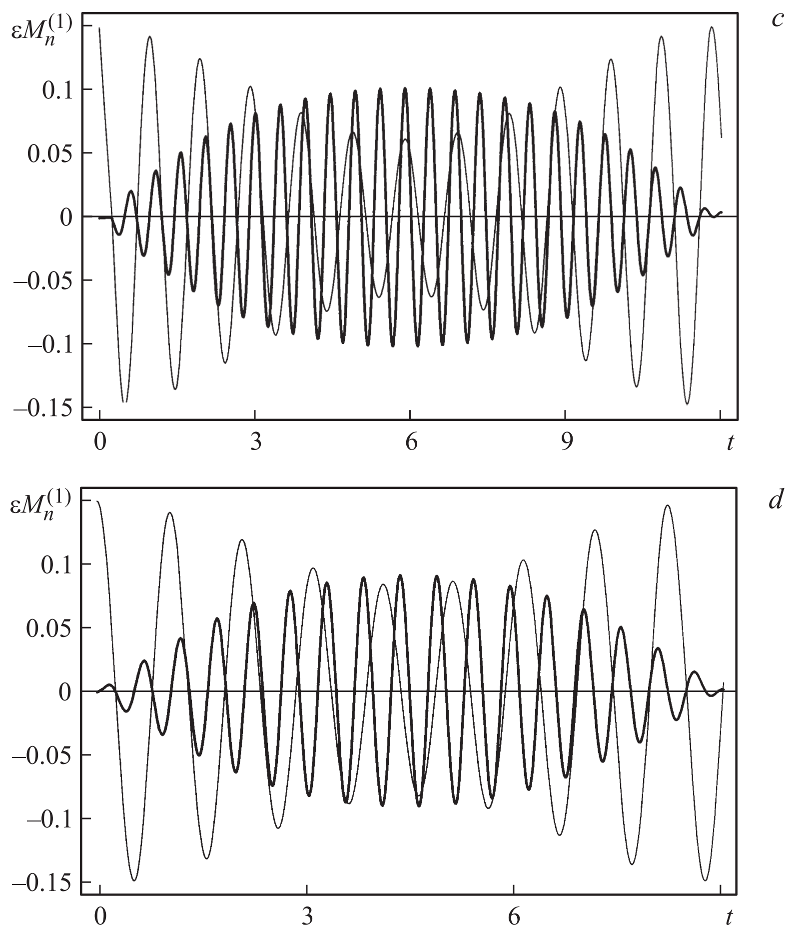
$$\varphi_{kp}^{(1)}(T_1) = \beta_k^{(1)}(T_1) + 2b_p^{(1)}(T_1);$$

$$\Lambda_{pqk}^{(\pm)} = (\gamma_{pqk} + \gamma_{qpk}) \pm \omega_p\omega_q(\eta_{pqk} + \eta_{qpk}).$$

На рис. 1 представлены временны́е зависимости амплитуд $M_4^{(1)}(t)$ и $M_6^{(1)}(t)$ резонансно взаимодействующих четвертой и шестой мод,

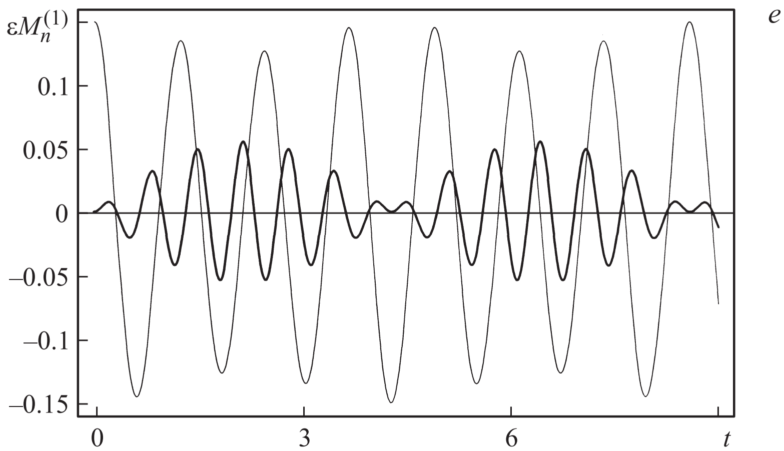


Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитуд резонансно взаимодействующих четвертой и шестой мод: *a* — в положении точного резонанса $W = 2.6667$; *b* — $W = 0$; *c* — $W = 2.5$; *d* — $W = 3$; *e* — $W = 3.9$. Тонкая линия соответствует изначально возбужденной четвертой моде, толстая линия — резонансно раскачиваемой шестой моде.



Продолжение рисунка.

рассчитанные по (4)–(5) в положении точного резонанса $W_r = 2.66667$ при $\varepsilon = 0.3$ и различных значениях параметра W (определяющего величину расстройки σ), отличных от W_r, когда в начальный момент времени возбуждена только четвертая мода, а шестая имеет нулевую амплитуду.



Продолжение рисунка.

Из сравнения зависимостей, приведенных на рис. 1, видно, что нелинейное взаимодействие мод имеет резонансный характер при любых значениях параметра $W < W_{cr} = 4$, что является следствием малости расстройки частот четвертой и шестой мод при изменении W в указанном диапазоне. Несложно также видеть, что по мере увеличения абсолютной величины параметра расстройки уменьшается характерное время резонансного взаимодействия мод, определяемое временем нарастания амплитуды моды до максимального значения, и доля энергии, передаваемой изначально возбужденной четвертой модой резонансно раскачиваемой шестой моде (полная перекачка энергии между модами имеет место только в положении точного резонанса).

6. Заключение. Малая чувствительность резонансного взаимодействия мод нелинейно осциллирующей капли к величине собственного заряда приводит к тому, что резонансы, реализующиеся в капле, определяются исключительно спектром мод, возбужденных в начальный момент времени. Амплитуда же резонансно раскачиваемых мод в различных наборах частот будет зависеть от расстройки частот, которая в свою очередь определится отклонением имеющегося на капле заряда от резонансного для данного набора частот значения.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ 00–15–9925.

Список литературы

[1] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* // ПЖТФ. 2003. Т. 28. В. 6. С. 69–75.
[2] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
[3] *Tsamopoulos J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[4] *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 2002. Т. 28. В. 22. С. 45–51.
[5] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 2. С. 19–30.
[6] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. В. 2. С. 27–35.
[7] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
[8] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.