01;09

Об одном условии, налагаемом на электромагнитную поляризуемость бианизотропного рассеивателя без потерь

© *П.А. Белов, С.И. Масловский, К.Р. Симовский, С.А. Третьяков*

С.-Петербургский государственный институт точной механики и оптики
(Технический университет)
E-mail: belov@rain.ifmo.ru
Helsinki University of Technology,
Radio Laboratory,
P.O. Box 3000, FIN-02015 HUT, Finland
E-mail: stas@cc.hut.fi

Поступило в Редакцию 27 февраля 2003 г.

При моделировании электромагнитных рассеивателей в рамках дипольного приближения и приближения локального поля используется тензор поляризуемости. Элементы матрицы этого тензора определяются геометрией рассеивателя и являются благодаря рассеянию комплексными числами даже в отсутствие потерь в его материале. Оказывается, что возможно установить условие, которому подчиняется тензор поляризуемости рассеивателей, не обладающих диссипативными потерями. Данная статья посвящена выводу этого условия для бианизотропных рассеивателей. Обсуждается его применение при аналитическом моделировании периодических структур из таких включений.

Для описания рассеянного поля малых рассеивателей сложной формы часто используется дипольное приближение. В рамках этого приближения рассеиватель заменяется парой диполей: электрическим и магнитным. Полем этих диполей и моделируется рассеянное поле. Замена рассеивателя сложной геометрии двумя диполями приводит к введению оператора поляризуемости, связывающего дипольные моменты с *локальными* (внешними, сторонними по отношению к включению) электрическим и магнитным полями. Этот оператор несет в себе всю информацию о сложной геометрии рассеивателя и о материале, из которого он сделан. В общем случае оператор поляризуемости зависит как от частоты поля ω, так и от характера распределения внешнего поля в объеме, занимаемом рассеивателем. В рамках приближения однородных локальных полей, дипольные моменты определяются электрическим и магнитным полями, которые предполагаются неизменными в объеме рассеивателя. В этом случае оператор поляризуемости может быть заменен на тензор поляризуемости $\overline{\overline{\alpha}}$ размерности 6×6:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix} = \overline{\overline{\alpha}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$ — комплексные амплитуды электрического и магнитного моментов рассеивателя, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — локальные электрическое и магнитное поля, действующие на рассеиватель. Из пар векторов $(\mathbf{p}, \mathbf{m})$ и $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ формируются шестивекторы, связанные равенством (1).

В большинстве работ, посвященных бианизотропным средам (см., например, [1–3]), используется диадный формализм, в котором (1) представляется как

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \overline{\overline{a}}_{ee} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{a}}_{em} \cdot \mathbf{H}, \\ \mathbf{m} = \overline{\overline{a}}_{me} \cdot \mathbf{E} + \overline{\overline{a}}_{mm} \cdot \mathbf{H}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\overline{\overline{a}}_{ee}$, $\overline{\overline{a}}_{em}$, $\overline{\overline{a}}_{me}$, $\overline{\overline{a}}_{mm}$ — диады размерности 3. Таким образом, находим, что

$$\overline{\overline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{a}}_{ee} & \overline{\overline{a}}_{em} \\ \overline{\overline{a}}_{me} & \overline{\overline{a}}_{mm} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

В случае изотропного немагнитного рассеивателя ($\overline{\overline{a}}_{ee} = \alpha\overline{\overline{I}}$, $\overline{\overline{a}}_{em} = \overline{\overline{a}}_{me} = \overline{\overline{a}}_{mm} = 0$, где через $\overline{\overline{I}}$ обозначена единичная диада) в работе [4] показано, что для рассеивателя без потерь

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{\alpha}\right\} = -\frac{k^3}{6\pi\varepsilon_0}, \tag{4}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ — волновое число вмещающей рассеиватель изотропной среды, а ε_0 и μ_0 — ее диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Это условие (далее будем называть его условием Сайпа–Кранендонка) ограничивает значения комплексного числа α тем, что фиксирует мнимую часть его обратной величины. Условие на вещественную и мнимую части α выглядит так:

$$\mathrm{Im}\{\alpha\} = \frac{k^3}{6\pi\varepsilon_0}\sqrt{(\mathrm{Re}\{\alpha\})^2 + (\mathrm{Im}\{\alpha\})^2}. \tag{5}$$

Данное условие играет существенную роль в теории рассеяния света (см., например, [5]) и обсуждалось еще в работах М. Планка [6] и Л.И. Мандельштама [7].

Условие Сайпа–Кранендонка (4) является следствием закона сохранения энергии в рассеивателе. Тем самым оно оказывается крайне полезным при анализе регулярных структур рассеивателей, включая трехмерные [8,9] и двумерные решетки [10–12], позволяя записать условие сохранения энергии в этих периодических структурах. Интересно, что условие Сайпа–Кранендонка может быть выведено исходя как из соображений сохранения энергии в единичном рассеивателе, так и из закона сохранения энергии в регулярной структуре — результаты получаются идентичными. В данной статье мы будем следовать первому пути и обобщим условие Сайпа–Кранендонка (4) на случай бианизотропных рассеивателей.

Рассчитаем мощность, затрачиваемую сторонним полем на возбуждение бианизотропного рассеивателя:

$$\begin{aligned} P^{ext} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\big\{(j\omega\mathbf{p})^* \cdot \mathbf{E} + (j\omega\mathbf{m}) \cdot \mathbf{H}^*\big\} \\ &= -\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}\right\} = -\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}^* \cdot \overline{\overline{\alpha}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}\right\} \\ &= -\frac{\omega}{4j}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}^* \cdot \left[\overline{\overline{\alpha}}^{-1} - \left(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}\right)^{\dagger}\right] \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь через † обозначен оператор Эрмитова сопряжения. Отметим, что в случае комплексного базиса $\{\mathbf{e}_i\}|_{i=1}^{6}$, Эрмитово сопряжение тензора не эквивалентно Эрмитову сопряжению соответствующей ему матрицы и требует сопряжения базиса:

$$\overline{\overline{\alpha}} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\alpha_{ij}e_ie_j,$$

$$\overline{\overline{\alpha}}^{\dagger} \equiv \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\alpha_{ji}^{*}e_i^{*}e_j^{*} = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\alpha_{ij}^{\dagger}e_i^{*}e_j^{*} \neq \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\alpha_{ij}^{\dagger}e_ie_j. \tag{7}$$

Это замечание полезно при рассмотрении гиротропных рассеивателей [9], тензор поляризуемости которых удобно записывать в базисе векторов эллиптической поляризации. Мощность, излучаемая рассеивателем, дается следующей формулой:

$$P^{rad} = \frac{\omega^4}{12\pi c}(\mu_0 \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p} + \varepsilon_0 \mathbf{m}^* \cdot \mathbf{m}) = \frac{\omega^4}{12\pi c}\begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}^* \cdot \begin{pmatrix}\mu_0\overline{\overline{I}} & 0\\ 0 & \varepsilon_0\overline{\overline{I}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\mathbf{p}\\ \mathbf{m}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

В предположении отсутствия потерь в рассеивателе принимаемая (6) и излучаемая (8) мощности равны:

$$P^{ext} = P^{rad}. \tag{9}$$

В случае существования обратного тензора $\overline{\overline{\alpha}}^{-1}$ для произвольно заданных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{m}$ всегда может быть найдено электрическое и (или) магнитное поле, необходимое для их возбуждения, откуда мы получаем обобщение условия Сайпа–Кранендонка (4) в следующем виде:

$$\frac{1}{2j}\left[\overline{\overline{\alpha}}^{-1} - \left(\overline{\overline{\alpha}}^{-1}\right)^{\dagger}\right] = -\frac{k^3}{6\pi}\begin{pmatrix}\overline{\overline{I}}/\varepsilon_0 & 0\\ 0 & \overline{\overline{I}}/\mu_0\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Для взаимных сред ($\overline{\overline{\alpha}}_{ee} = \overline{\overline{\alpha}}_{ee}^T$, $\overline{\overline{\alpha}}_{mm} = \overline{\overline{\alpha}}_{mm}^T$, $\overline{\overline{\alpha}}_{em} = -\overline{\overline{\alpha}}_{me}^T$) это условие в диадной интерпретации представляет собой тройку диадных уравнений [12], эквивалентных (10) (если соответствующие обратные диады существуют):

$$\mathrm{Im}\left\{\left(\overline{\overline{\alpha}}_{ee} - \overline{\overline{\alpha}}_{em} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{mm}^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{me}\right)^{-1}\right\} = \frac{k^3}{6\pi\varepsilon_0}\overline{\overline{I}}, \tag{11}$$

$$\mathrm{Im}\left\{\left(\overline{\overline{\alpha}}_{mm} - \overline{\overline{\alpha}}_{me} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{ee}^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{em}\right)^{-1}\right\} = \frac{k^3}{6\pi\mu_0}\overline{\overline{I}}, \tag{12}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\left(\overline{\overline{\alpha}}_{ee} - \overline{\overline{\alpha}}_{em} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{mm}^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{me}\right)^{-1} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{em} \cdot \overline{\overline{\alpha}}_{mm}^{-1}\right\} = 0. \tag{13}$$

В случае, когда рассеиватель не обладает бианизотропными свойствами ($\overline{\overline{a}}_{em} = \overline{\overline{a}}_{me} = 0$), (10) разбивается на два независимых условия:

$$\mathrm{Im}\left\{\overline{\overline{a}}_{ee}^{-1}\right\} = -\frac{k^3}{6\pi\varepsilon_0}\overline{\overline{I}},$$

$$\mathrm{Im}\left\{\overline{\overline{a}}_{mm}^{-1}\right\} = -\frac{k^3}{6\pi\mu_0}\overline{\overline{I}}. \tag{14}$$

В заключение отметим, что в данной статье приведен вывод обобщенного условия Сайпа–Кранендонка для бианизотропных рассеивателей без потерь. Это условие является следствием закона сохранения энергии для одного рассеивателя и оказывается крайне важным при анализе сохранения энергии в регулярных структурах многих рассеивателей [8–12].

Список литературы

[1] *Tretyakov S.A., Mariotte F., Simovski C.R.* et al. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1996. V. 44. N 7. P. 1006–1013.

[2] *Simovski C.R., Tretyakov S.A., Sochava A.A.* et al. // J. Electromagn. Waves Applic. 1997. V. 11. P. 1509–1530.

[3] *Simovski C.R., Kondratjev M.S., Belov P.A.* et al. // IEEE Trans. Antennas Propag. 1999. V. 47. N 9. P. 1429–1439.

[4] *Sipe J.E., Van Kranendonk J.* // Phys. Rev. A. 1974. V. 9. N 5. P. 1806–1822.

[5] *Собельман И.И.* // УФН. 2002. Т. 172. № 1. С. 85–90.

[6] *Planck M.* // Sitzungsber. Konig. Preuss Acad. 1902. V. 24. P. 470–487.

[7] *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 1. Изд. АН СССР, 1948.

[8] *Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* // J. Opt. Soc. Am. A. 2000. V. 17. N 10. P. 1791–1797.

[9] *Belov P.A., Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 016608.

[10] *Tretyakov S.A., Viitanen A.J.* // J. Electromagn. Waves Applic. 2000. V. 14. N 8. P. 1159–1177.

[11] *Belov P.A., Tretyakov S.A.* // J. Electromagn. Waves Applic. 2002. V. 16. N 1. P. 129–143.

[12] *Yatsenko V.V., Maslovski S.I., Tretyakov S.A.* et al. // IEEE Trans. Antennas Propag. 2003. V. 51. N 1.