01;09

Бифуркационные явления с аддитивным увеличением периода колебаний в системе с полутора степенями свободы

© Н.А. Максимов, С.В. Савельев

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва
E-mail: savelyev@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 13 марта 2003 г.

Численно установлено, что система с инерционностью демонстрирует последовательность бифуркаций колебаний в соответствии с законом натурального ряда. Показано, что последовательность бифуркационных значений параметра инерционности подчиняется закону сходимости, определены его моменты.

Исследования систем с инерционностью широко представлены в научной литературе из-за демонстрируемой ими богатой динамики (например, [1–5]). Такие системы обладают регулярной и сложной динамикой, развитие автоколебательного процесса в которых зависит как от способа подключения инерционной цепи, так и от вида динамической характеристики нелинейного усилительного элемента. Так, система с 1.5 степенями свободы [1,2], представляющая модифицированный генератор с инерционностью, демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний при переходе к хаосу. В работе [3] экспериментально исследована автоколебательная система, демонстрирующая возникновение хаоса в результате последовательного увеличения периода колебаний по закону натурального ряда. При численном моделировании такой сценарий колебаний не исследовался.

В работе численными методами исследуется система с инерционностью

$$\begin{aligned}
&\dot{X} = Y + (m_1 - m_2)X - XZ, \quad X \leqslant q,\\
&\dot{X} = Y - m_2X - qZ, \quad X > q,\\
&\dot{Y} = -X,\\
&\dot{Z} = -gZ + gF(X)X^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $F(X)$ — функция Хевисайда; m_1, m_2, q, g — параметры возбуждения, диссипации, ограничения и инерционности соответственно. От моди-

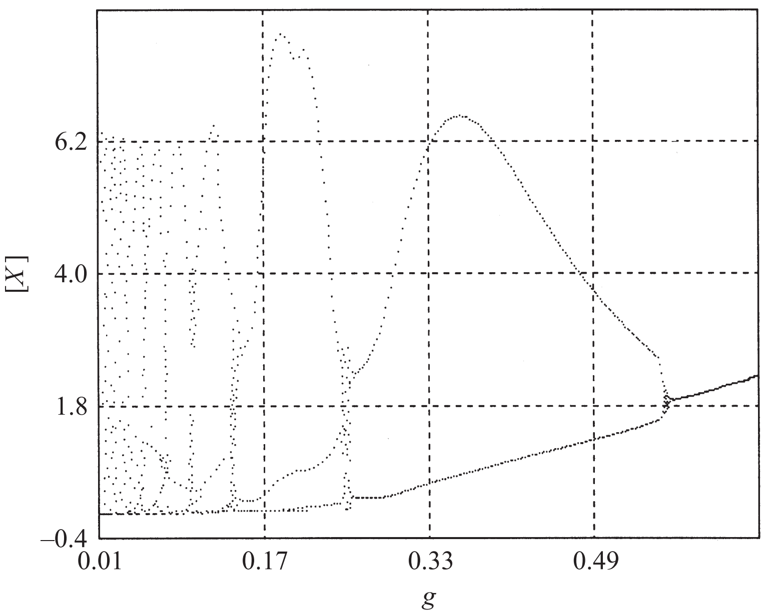

Рис. 1.

фицированного генератора с инерционностью систему (1) отличает форма динамической характеристики нелинейного усилителя, которая имеет линейный участок при $X \leqslant q$ и участок с насыщением при $X > q$. Четвертое уравнение описывает инерционный однополупериодный инерционный преобразователь. Таким образом, динамика системы определяется двумя механизмами ограничения колебаний. Первый механизм — безынерционный и связан с нелинейностью характеристики усилительного элемента. Второй — инерционный, обусловлен влиянием напряжения с выхода инерционного преобразования на крутизну нелинейного усилителя.

Развитие колебательного процесса в системе (1) наглядно демонстрирует фрагмент бифуркационной диаграммы (рис. 1) изменения максимальных значений $[X]$ колебательного процесса $X(t)$ при адиабатическом изменении g в случае $m_1 = 1.6$, $m_2 = 0.1$, $q = 0.05$. Малое изменение значений $[X]$ на бифуркационной диаграмме соответствует регулярной динамике системы, случайный разброс точек — хаотической динамике. С изменением параметра инерционности система претерпевает ряд бифуркационных процессов. В интервале $g \in [0.57; 0.65]$ динамика системы характеризуется устойчивым предельным циклом периода T_0. Интервал $g \in [0.56; 0.57]$ соответствует хаотическим колебаниям. Точка $g = 0.56$ является бифуркационной точкой. Динамика системы претерпевает удвоение периода колебаний с предельным циклом периода $2T_0$, имеющим место при $g \in [0.26; 0.56]$. По достижении значения $g = 0.24$ система переходит к движению по устойчивому циклу с периодом $3T_0$. Зоны двухтактного и трехтактного цикла разделены зоной хаотических колебаний при $g \in [0.24; 0.26]$. Дальнейшее уменьшение параметра инерционности приводит к изменению состояний системы в виде устойчивых предельных циклов, периоды колебаний которых последовательно увеличиваются на единицу. Зоны устойчивых состояний системы с периодами nT_0 и $(n+1)T_0$ разделены зонами хаотических колебаний. При каждой последующей бифуркации расстояния между критическими значениями изменяемого параметра уменьшаются, зоны хаотических колебаний располагаются плотнее.

Бифуркационный сценарий колебаний с аддитивным увеличением периода колебаний на единицу позволяет рассчитывать на существование сходимости последовательности бифуркационных значений параметра инерционности g_n. Это означает, что для последовательности g_n имеет место закон сходимости

$$g_k - g_n \sim n^{\gamma}, \tag{2}$$

где g_k и g_n — бифуркационные значения параметра g, γ — константа, $n = 1, 2, \ldots$ Соотношения вида (2) установлены для последовательности двухмерных торов (например, [4,5]). Поэтому интересен вопрос о существовании закона сходимости для последовательности предельных циклов в системе с полутора степенями.

Для определения масштабно-инвариантных свойств выявлялось n членов последовательности устойчивых циклов системы (1) с фиксацией бифуркационных значений параметров g_n. Численные расчеты показывают, что закон сходимости выполняется с хорошей точностью, о чем говорит графическая проверка масштабно-инвариантных свойств для g_n (рис. 2, кривые *1*, *2* и *3*, построенные для различных значений m_1: 1.8, 1.6, 1.4 соответственно). Полученные методом наименьших

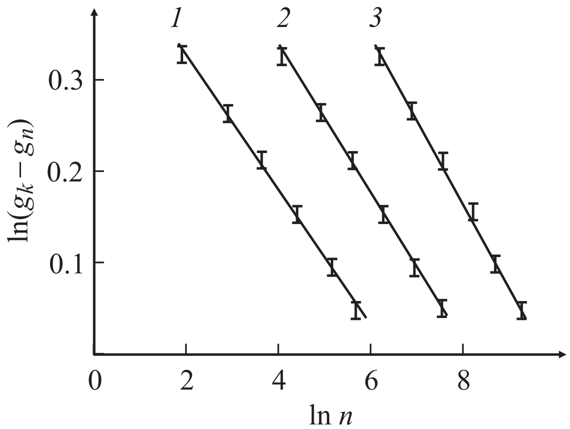

Рис. 2.

квадратов значения коэффициентов выборочной линейной корреляции для соотношения

$$Q = A + \gamma\Theta, \tag{3}$$

где $Q = \ln(g_k - g_n)$, $\Theta = \ln n$, A и γ — константы, подтверждают статистическую значимость результатов. Оценка для последовательности кратности устойчивых циклов n и ряда значений параметра инерционности g_n позволяет сделать вывод о существовании закона сходимости с константой $\gamma = -3.75 \pm 0.17$. Существование закона подобия (2) позволяет рассчитать точку сгущения последовательности g_n, соответствующую для приведенных значений параметров значению $g_c = 0.008 \pm 0.001$.

Механизм перехода к хаотическим колебаниям иллюстрируют фрагменты проекций странного аттрактора в фазовом пространстве системы на плоскости (X, Y) и (X, Z), полученные для значения $g < g_c$ и представленные на рис. 3, a и b соответственно. Стрелками обозначено движение изображающей точки в фазовом пространстве системы. Анализ рис. 3 показывает, что вид аттрактора в фазовом пространстве системы определяется двойной петлей седло — фокус с переходящим характерным движением вдоль седловой сепаратрисы. В фазовом пространстве системы реализуется двойной аттрактор Шильникова [6],

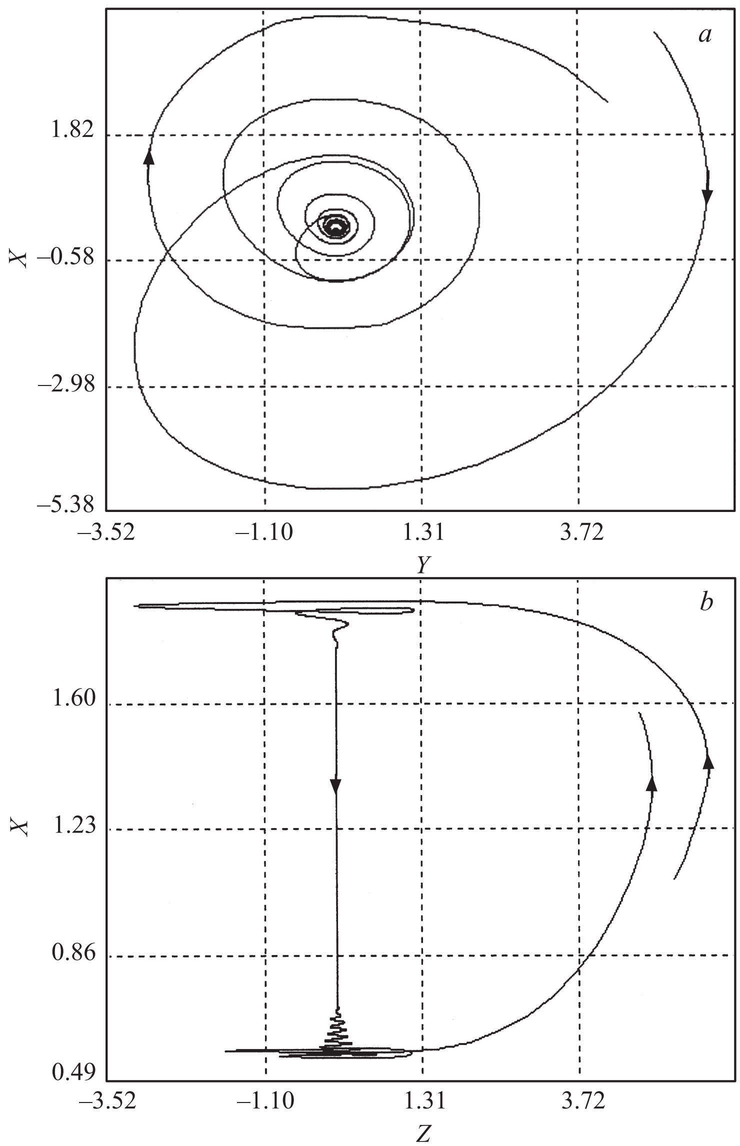
a
1.82
–0.58
–2.98
–5.38
X
–3.52
–1.10
1.31
3.72
Y
b
1.60
1.23
0.86
0.49
X
–3.52
–1.10
1.31
3.72
Z

Рис. 3.

состоящий из устойчивого фокусного и неустойчивого седлового и неустойчивого фокусного и устойчивого седлового движения.

Проведенный анализ свидетельствует о том, что глобальной хаотизации колебаний в исследуемой системе предшествует последовательность бифуркаций по закону натурального ряда, при этом устойчивые движения системы перемежаются зонами хаотических движений. Последовательность бифуркационных значений параметра инерционности подчиняется закону подобия. Механизм хаотизации колебаний связан с потерей устойчивости системы вблизи двойной петли седло — фокуса.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 01–02–17529 и 01–07–90349).

Список литературы

[1] *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. В. 1. С. 152–154.

[2] *Анищенко В.С.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. В. 10. С. 629–633.

[3] *Максимов Н.А., Кислов В.Я.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. В. 16. С. 979–982.

[4] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.

[5] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

[6] *Шильников Л.П.* // Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Киев: Наук. думка, 1985. С. 118–124.