01;03

Нелинейные электрокапиллярные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости

© Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

В окончательной редакции 21 апреля 2003 г.

Во втором порядке малости по амплитуде волнового движения на однородно заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения и силы тяжести, найдено аналитическое выражение для профиля плоской бегущей волны. Анализ полученного выражения показывает, что при некотором фиксированном значении поверхностной плотности заряда, докритическом в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, формы профилей волн качественно изменяются по сравнению с нелинейными капиллярно-гравитационными волнами на незаряженной поверхности жидкости, в этой связи найденная ветвь волн названа электрокапиллярной.

Несмотря на длительную историю и заметные успехи изучения периодических капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности идеальной несжимаемой жидкости [1–2], количество исследований нелинейных волн на заряженной поверхности электропроводной жидкости достаточно мало, а выполненные исследования [3–5] в основном ориентированы на получение решений в виде уединенных волн и оставляют за своими рамками изучение периодических капиллярно-гравитационных волн и роли поверхностного заряда в формировании профиля таких волн. В этой связи и выполнена настоящая работа.

Предполагается найти во втором порядке малости по амплитуде волны, которая считается малой по сравнению с ее длиной, стационарный профиль периодической гравитационно-капиллярной бегущей волны, форма которого остается неизменной при распространении волны. Отметим, что чисто синусоидальный профиль во втором порядке малости по амплитуде волны стационарным не является [1,2].

1. Математическая формулировка задачи о расчете стационарного профиля бегущей нелинейной периодической капиллярно-гравитационной волны длиной λ на однородно заряженной с плотностью $\varkappa$ свободной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, имеющей плотность ρ и заполняющей в поле сил тяжести $\mathbf{g}$ в декартовой системе координат, в которой $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$, а плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, полупространство $z \leqslant 0$, имеет вид:

$$z \leqslant \xi: \quad \Delta\varphi = 0; \quad p = -\rho g z - \rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2; \quad \xi > 0: \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$p + \frac{(\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2}; \quad \Phi = 0;$$

$$z \to \infty: \quad \operatorname{grad}\Phi = -4\pi\varkappa \cdot \mathbf{n}_z; \qquad z \to -\infty: \quad \operatorname{grad}\varphi = 0;$$

$\xi = \xi(x, t)$ — вызванное волновым движением отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной плоской формы $z = 0$; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля скоростей внутри жидкости и электрического поля над жидкостью; γ — коэффициент поверхностного натяжения.

2. Решение сформулированной задачи классическими методами теории нелинейных периодических волн (см., например, [1,6,7]) во втором порядке малости по амплитуде волны, малой по сравнению с длиной волны, позволяет найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде

$$\xi = a \cdot \cos(\omega t - kx) + a^2 \cdot k \cdot \Lambda \cdot \cos\big[2(\omega t - kx)\big]; \tag{1}$$

$$\omega^2 = gk\left(1 + \alpha^2 k^2 - \alpha k \cdot W\right); \qquad W = \frac{4\pi\varkappa^2}{\sqrt{\rho g \gamma}};$$

$$\Lambda = \frac{(1 + \alpha^2 k^2 - 2\alpha k W)}{4(0.5 - \alpha^2 k^2)}; \qquad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}};$$

α — капиллярная постоянная; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Первое слагаемое в (1) — известное решение задачи в линейном по амплитуде a

приближении. Амплитуда a считается изначально заданной подходящим выбором начальных условий.

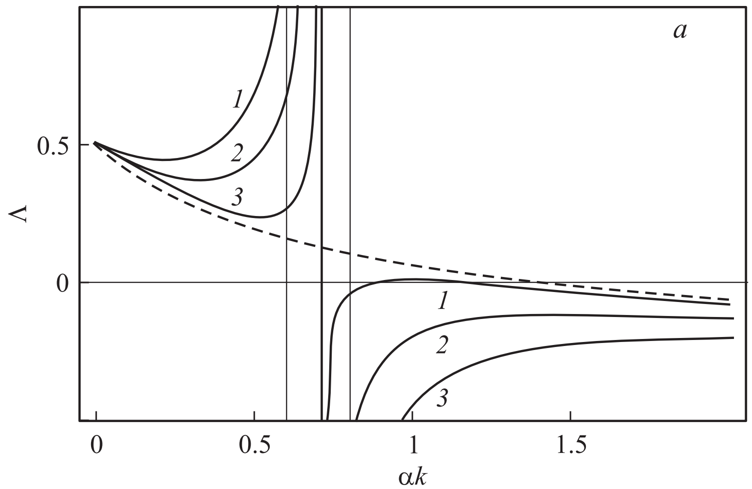
На рис. 1 показаны рассчитанные по (1) зависимости безразмерного множителя Λ, определяющего амплитуду добавки второго порядка малости, от безразмерного волнового числа αk при различных значениях W.

Из выражения (1) видно, что амплитудный коэффициент Λ в слагаемом второго порядка малости имеет резонансный вид: при $k = k_* = 1/\alpha\sqrt{2}$ знаменатель выражения для Λ обращается в ноль, а сама добавка стремится к бесконечности. Этот феномен для нелинейных волн на незаряженной поверхности жидкости исследован [6]. В отличие от случая незаряженной поверхности жидкости выражение для Λ в (1) содержит в числителе параметр W, входящий в него с отрицательным знаком и характеризующий устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к давлению электрического поля собственного заряда (неустойчивость Тонкса–Френкеля, реализующаяся при $W \geqslant 2$ [8]). Сказанное означает, что при определенных соотношениях физических параметров Λ может остаться конечным даже при равном нулю знаменателе.

Знаменатель Λ обращается в ноль при $k \to k_*$, но если положить $W = W_* = 3/(2\sqrt{2}) \approx 1.06$, то при таком предельном переходе числитель Λ также будет стремиться к нулю. В итоге при $W = W_*$ в пределе $k \to k_*$ для значения Λ получается неопределенность типа $0/0$, которая при вычислении по правилу Лопиталя дает $\Lambda = 1/8$. Сама зависимость $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$ становится непрерывной. Она приведена на рис. 1 пунктирной линией.

Отметим, что независимо от величины W при приближении k к значению k_* разложение (1) становится непригодным для представления решения, так как величина квадратичной по безразмерной амплитуде a добавки становится значительно больше линейного по a члена разложения. В этой связи интересно оценить влияние вязкости, играющей важную роль в резонансных явлениях. Проделаем это на примере воды, для которой $\alpha = 0.27\,\text{cm}$.

Согласно результатам работ [9,10], в которых проведено исследование нелинейных волн на незаряженной поверхности вязкой жидкости, для воды влияние вязкости на профиль волны существенно на интервале $\alpha k \in D = (0.6; 0.7)$. На концах этого интервала амплитуда добавки второго порядка малости, оцененная без учета вязкости, оказывается



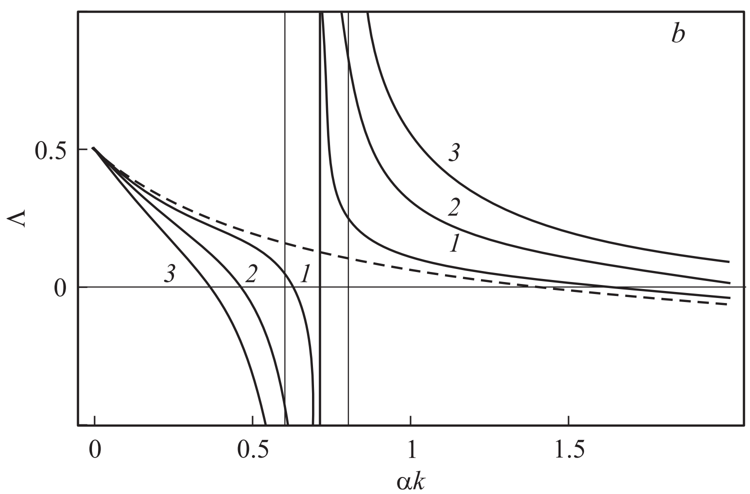


Рис. 1. Зависимости безразмерного множителя Λ от безразмерного параметра αk при различных значениях поверхностной плотности заряда, характеризуемой параметром W. *a*: *1* — $W = W_* - 0.05$; *2* — $W = W_* - 0.25$; *3* — $W = W_* - 0.5$; *b*: *1* — $W = W_* + 0.05$; *2* — $W = W_* + 0.25$; *3* — $W = W_* + 0.5$. Пунктирная линия соответствует $W = W_* = 3/(2\sqrt{2})$.

завышенной на несколько процентов своей величины, но при $k \to k_*$ это завышение становится бесконечным. Вне указанного интервала модели вязкой и невязкой воды дают хорошо согласующиеся результаты. В этой связи нижеследующий анализ проводится для волн, у которых $\alpha k \notin D$ при $W < 2$. Части зависимостей, которые на рис. 1 попадают внутрь интервала D, лишены физического смысла, так как они построены в области несовершенства исходной модели, подразумевающей отсутствие вязкости.

Из рис. 1 видно, что физически достоверные части зависимостей $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$ в пределе $W \to W_*$ стремятся к зависимости $\Lambda = \Lambda_*(\alpha k)$. Значение $W = W_*$ естественно принять за критерий разделения волновых движений. При таком W знак асимптотического значения Λ в пределе $k \to k_*$ на рассмотренных зависимостях меняется на противоположный. Из (1) также следует, что добавка второго порядка малости к линейной части решения при $k \neq k_*$ стремится к нулю при $W \to W_*$.

На рис. 1, *a* показано семейство зависимостей $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$, построенных при различных значениях $W \leqslant W_*$. В этой области значений W амплитуда добавки второго порядка малости при изменении волнового числа ведет себя так же, как и для незаряженной поверхности жидкости: для волнового движения характерны профили с заостренной вершиной у длинных волн с $k < k_*$ и с притупленной вершиной у коротких волн с $k > k_*$ (см. об этом подробнее в [6]). В соответствии с [6] такое волновое движение естественно назвать капиллярно-гравитационным, расширяя это понятие на случай волн на заряженной поверхности.

На рис. 1, *b* изображены зависимости $\Lambda = \Lambda(\alpha k)$, рассчитанные при различных значениях параметра W из диапазона $W_* \leqslant W < 2$. Несложно видеть, что приведенные зависимости в некотором смысле обратны изображенным на рис. 1, *a*: правые физически достоверные части этих зависимостей, отвечающие коротким волнам, положительны в достаточно протяженной правой окрестности точки $k = k_*$, а не отрицательны, как на рис. 1, *a* (ветвь *1* уходит в область отрицательных значений на достаточно большом расстоянии от $k = k_*$). Поэтому нелинейные волны, отвечающие этим зависимостям, естественно интерпретировать как новый, ранее неизвестный, тип периодического волнового движения на поверхности идеальной жидкости, появление которого связано с наличием поверхностного заряда. Профили таких волн приведены на рис. 2 в сравнении с профилями волн на незаряженной поверхности

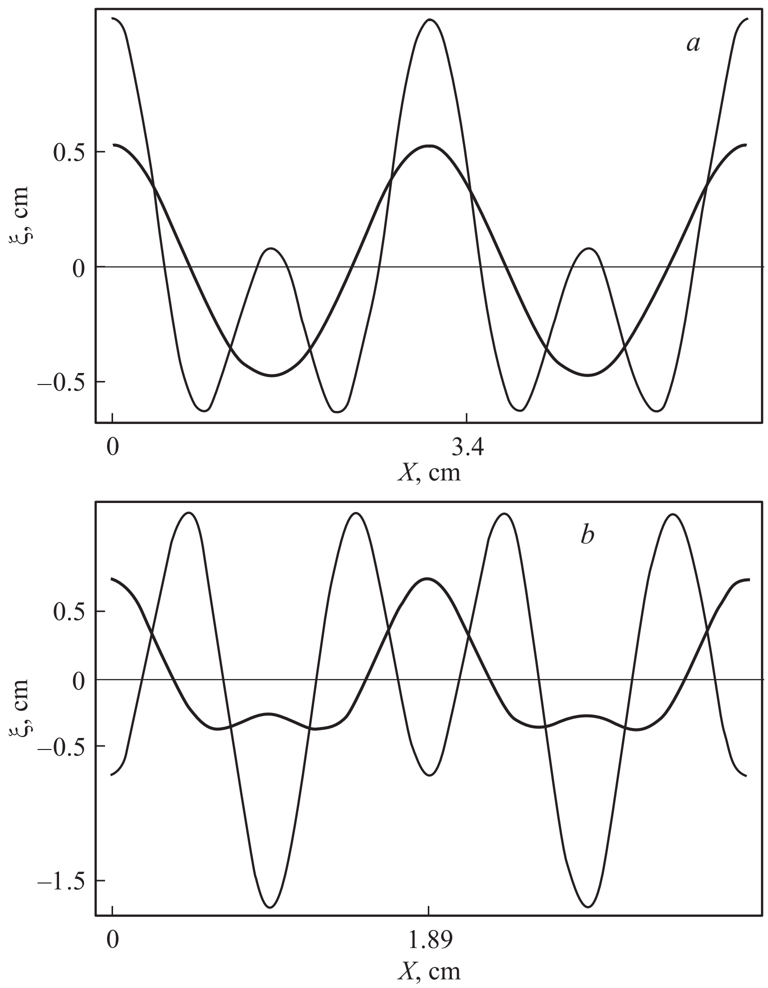


Рис. 2. Профили волн на воде, рассчитанные по формуле (1), при $W = 0$ (тонкая линия) и $W = 1.2$ (жирная линия) и различных значениях волнового числа k: a — $\alpha k = 0.5$; b — $\alpha k = 0.9$.

жидкости. Несложно видеть, что профили капиллярно-гравитационных волн на заряженной и незаряженной поверхности жидкости различаются существенным образом. Обнаруженные волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости уместно назвать электрокапиллярно-гравитационными или просто электрокапиллярными, пренебрегая слабым в рассматриваемом диапазоне волновых чисел влиянием поля сил тяжести.

3. Заключение. Нелинейные волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости качественно отличаются от нелинейного волнового движения на незаряженной поверхности жидкости. Кривизна вершин электрокапиллярных волн увеличивается с ростом поверхностной плотности заряда (с ростом параметра W) при $W_* < W \to 2$. Интересно, что этот эффект имеет место при докритическом в смысле неустойчивости Тонкса–Френкеля значении W, о чем в научной литературе до сих пор не сообщалось, хотя исследованию кривизны волн на неустойчивой заряженной поверхности жидкости посвящено немало исследований (см., например, [5,11–15]). Интересно также, что при $W \to W_*$ электрический заряд оказывается фактором, уменьшающим эффективность нелинейного взаимодействия волн на свободной поверхности, поскольку при этом добавка второго порядка малости стремится к нулю.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 03–01–00760.

Список литературы

[1] *Стокер Дж.* Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
[2] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
[3] *Жакин А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. В. 3. С. 94–102.
[4] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. 1994. V. 49. N 4. P. 2935–2940.
[5] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990–2005.
[6] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. P. 385–395.
[7] *Найфе Ф.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
[8] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. В. 4. С. 348–350.
[9] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 19. С. 1–9.
[10] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 4. С. 28–37.
[11] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. В. 1. С. 137–151.

[12] *Александров М.Л., Галль Л.Н., Иванов В.Я.* и др. // Изв. РАН СССР. МЖГ. 1983. В. 6. С. 165–167.
[13] *Allen J.E.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1985. V. 18. N 1. P. 59–62.
[14] *Шевченко С.И.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. В. 2. С. 54–58.
[15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ИФЖ. 1991. Т. 60. В. 4. С. 632–641.