

01;09

## К вопросу о поведении динамических систем в режиме переходного хаоса

© Г.Б. Астафьев, А.А. Короновский, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
Государственный учебно-научный центр „Колледж“  
E-mail: astafyev@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 6 мая 2003 г.

Рассматривается режим переходного хаоса в двумерной системе с дискретным временем — отображении Эно. Показано, что временная реализация, соответствующая режиму переходного хаоса, отличается от хаотической реализации, построенной при близких значениях управляющих параметров, наличием „нерегулярных“ участков, число которых увеличивается по мере возрастания параметра надкритичности. Обсуждается механизм возникновения подобного эффекта.

Явление переходного хаоса, возникающее при кризисе хаотического аттрактора [1], достаточно часто встречается в динамических системах различной природы. В частности, явление переходного хаоса наблюдалось в гидродинамических экспериментах [2], радиотехнических схемах [3], химических реакциях [4], в оптических бистабильных средах [5], в распределенных активных средах „электронный поток, взаимодействующий со встроочной электромагнитной волной“ [6], в эталонных моделях нелинейной динамики, таких как логистическое отображение [7], отображение Эно [8], система Ресслера [9]. Суть явления переходного хаоса заключается в следующем: при некотором значении управляющего параметра системы (обозначим его через  $p$ ) расстояние в фазовом пространстве между хаотическим аттрактором

и границей его бассейна притяжения уменьшается до тех пор, пока при критическом значении параметра  $p = p_c$  аттрактор и граница его бассейна не соприкоснутся. В этот момент происходит кризис хаотического аттрактора, и при значениях управляющего параметра  $p > p_c$  хаотического аттрактора больше не существует, он превращается в неустойчивое хаотическое множество, называемое хаотическим седлом. Соответственно изменяется поведение системы: вместо хаотической динамики она демонстрирует переходный хаос. На начальном этапе поведение системы практически не отличается от хаотического, но затем, внешне внезапно, система быстро переходит к другому устойчивому состоянию (аттрактору), которое может быть стационарным, периодическим или хаотическим.

Хаотическое седло, заменяющее в фазовом пространстве хаотический аттрактор, представляет значительный интерес для исследователей. Некоторые свойства хаотического седла могут быть получены из исследования начальных участков, отвечающих режиму переходного хаоса, большого числа временных реализаций [9,10]. Другой подход заключается в построении искусственно длинной временной реализации, получаемой „сшиванием“ начальных участков временных реализаций в одну [11]. Наконец, для получения траекторий, долгое время существующих в непосредственной окрестности хаотического седла, можно использовать так называемые PIM-triple [12] и PIM-simplex [13] методы, а также метод пошаговых возмущений [14]. Получающаяся в результате длинная временная реализация является хорошей аппроксимацией хаотической траектории, принадлежащей хаотическому неустойчивому множеству.

Целью настоящей работы является сопоставление хаотических траекторий, полученных при двух близких значениях управляющего параметра  $p$ , одна из которых соответствует хаотическому аттрактору ( $p < p_c$ ), а другая — хаотическому седлу ( $p > p_c$ ).

В качестве объекта исследования выбрано отображение Эно [15]

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \lambda x_n(1 - x_n) + by_n, \\y_{n+1} &= x_n,\end{aligned}\tag{1}$$

являющееся эталонной моделью нелинейной динамики. При значениях управляющих параметров  $\lambda_c \approx 4.21934$  и  $b = 0.61$  хаотический аттрактор, родившийся на базе цикла периода три через каскад бифуркаций удвоения периода, претерпевает граничный кризис, теряет свою устой-

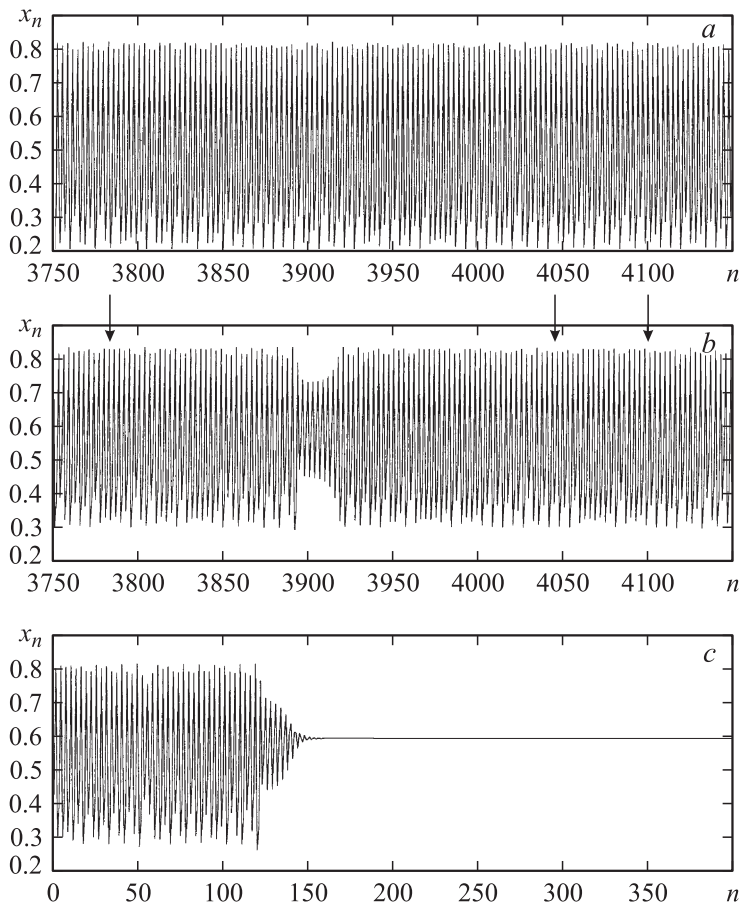
чивость и превращается в хаотическое седло. Одновременно в фазовом пространстве существует устойчивая неподвижная точка, являющаяся аттрактором.

Временная реализация, соответствующая хаотическому аттрактору, была построена при значении управляющего параметра  $\lambda = 4.219$  (рис. 1, *a*). Аналогичная временная реализация, соответствующая хаотическому седлу ( $\lambda = 4.22$ ), была получена методом пошаговых возмущений [14]. Суть этого метода сводится к следующему: для любой точки  $\mathbf{x}$ , лежащей в окрестности хаотического седла, определяется время  $T(\mathbf{x})$ , в течение которого фазовая траектория, стартующая с этой точки, достигает аттрактора [16]. Если это время  $T(\mathbf{x})$  оказывается больше некоторого порогового значения  $T^*$ , то полагается, что точка  $\mathbf{x}$  принадлежит неустойчивому хаотическому множеству. Для построения длительной временной реализации, отвечающей режиму переходного хаоса, исходная динамическая система итерировалась следующим образом:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{x}_n), & \text{если } T(\mathbf{x}_n) > T^* \text{ (шаг)}, \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_n + \mathbf{r}_n), & \text{если } T(\mathbf{x}_n) \leq T^* \text{ (}\mathbf{r}_n \text{ — возмущение)}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  — оператор эволюции исходной динамической системы;  $\mathbf{r}_n$  — вектор возмущения, который удовлетворяет условиям  $T(\mathbf{x}_n + \mathbf{r}_n) > T^*$  и  $|\mathbf{r}_n| < \delta = 10^{-7}$ . Вектор  $\mathbf{r}_n$  является случайной величиной, однако для ускорения процесса построения временной реализации распределение плотности вероятности  $p(\mathbf{r})$  должно обладать рядом свойств (см. работу [14]).

Таким образом, пока время выхода изображающей точки на аттрактор превышает некоторый наперед заданный достаточно большой порог  $T^*$ , считается, что эта точка находится вблизи хаотического седла. Соответственно итерировалась исходная динамическая система (в данном случае отображение Эно (1)). Как только время достижения изображающей точкой аттрактора становится равным пороговому значению, точка траектории возмущается малыми возмущениями  $\mathbf{r}_n$  и среди всех возможных возмущений  $\mathbf{r}_n$  выбирается такое, чтобы время достижения изображающей точкой аттрактора из возмущенной точки  $T(\mathbf{x}_n + \mathbf{r}_n)$  вновь превышало пороговое значение  $T^*$ . Поскольку вектор возмущения  $\mathbf{r}$  очень мал ( $\mathbf{r}$  по модулю меньше  $\delta = 10^{-7}$ ), получающаяся последовательность  $\mathbf{x}_n$  с хорошей степенью точности аппроксимирует хаотическое седло.



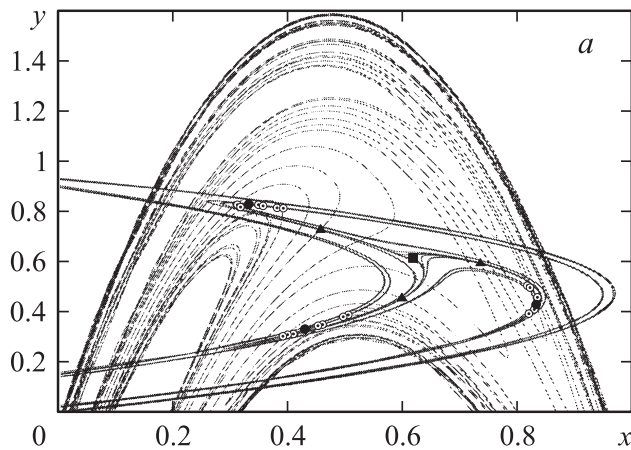
**Рис. 1.** Фрагменты:  $a$  — временной реализации, соответствующей хаотическому аттрактору ( $\lambda = 4.219$ );  $b$  — аналогичной временной реализации, соответствующей хаотическому седлу ( $\lambda = 4.22$ ), построенной методом пошаговых возмущений ( $b = -0.61$ ) (стрелками показаны моменты времени, в которые вносились малые возмущения  $r$ );  $c$  — временной реализации, соответствующей выходу системы из режима переходного хаоса ( $\lambda = 4.22$ ,  $b = -0.61$ ).

Как следует из результатов проведенных исследований, временная реализация, соответствующая режиму переходного хаоса, отличается от хаотической реализации лишь наличием „всплесков“ — нерегулярных участков, во время которых динамика системы отличается от типичной. Во все остальное время хаотическая временная реализация и реализация, соответствующая режиму переходного хаоса, практически не отличаются друг от друга (рис. 1). Следует отметить, что появление нерегулярных участков на временной реализации, соответствующей режиму переходного хаоса, никоим образом не связано с малыми возмущениями  $\mathbf{r}$ , вносимыми в динамику системы. На рис. 1,  $b$  моменты дискретного времени  $n$ , в которые вносятся возмущения, показаны стрелками. Отчетливо видно, что после внесения возмущения  $\mathbf{r}$  система еще долгое время демонстрирует типичное поведение и лишь затем появляется нетипичный участок реализации. Более того, далеко не после каждого возмущения происходит „всплеск“.

По мере роста параметра надкритичности  $(\lambda - \lambda_c)$  число таких нерегулярных участков увеличивается, а длительность регулярных участков, наоборот, уменьшается. Поведение системы в режиме переходного хаоса во многом похоже на перемежаемость [17,18], когда ламинарные участки временной реализации сменяются турбулентными, или на индуцированную кризисом перемежаемость [19], когда в результате кризиса происходит объединение нескольких областей хаотического аттрактора и изображающая точка, проведя некоторое время в одной области аттрактора, перебрасывается в другую.

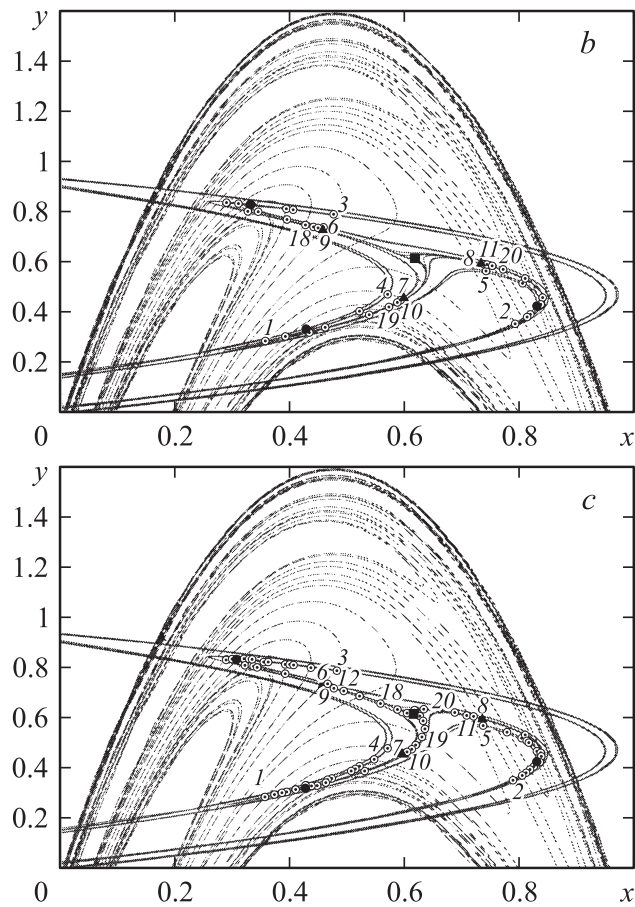
Появление подобных нерегулярных участков во временной реализации, соответствующей режиму переходного хаоса, во многом обусловлено теми же самыми причинами, что и выход изображающей точки из области хаотического седла [20].

На рис. 2 приведена структура многообразий двух неустойчивых циклов периода три, сосуществующих в фазовом пространстве вместе с неподвижной устойчивой точкой при значении управляющих параметров  $\lambda = 4.22$ ,  $b = -0.61$ . Построение многообразий осуществлялось с помощью метода, описанного в работах [21–23]. Видно, что устойчивые и неустойчивые многообразия имеют весьма сложную структуру и бесконечное число раз пересекаются друг с другом. На рис. 2,  $a$  показана траектория изображающей точки системы во время типичного поведения. Видно, что точки хаотического седла располагаются вдоль неустойчивых многообразий неустойчивых циклов периода три и локализованы в некоторой области.



**Рис. 2.** Схематическое расположение неподвижной устойчивой точки (■), неустойчивых циклов периода три (показаны точками ▲ и ●) и их многообразий для выбранных значений управляющих параметров  $\lambda = 4.22$ ,  $b = -0.61$ . Неустойчивые многообразия показаны сплошной линией, устойчивые — штриховой. *a* — точки (○) типичного отрезка временной реализации системы, находящейся в режиме переходного хаоса; *b* — точки, соответствующие нетипичному участку временной реализации (цифрами показан номер итерации, начиная с единицы, когда изображающая точка попадает в область пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий 3-цикла, что влечет за собой появление нетипичного участка во временной реализации); *c* — точки, отвечающие участку временной реализации, когда динамическая система (*I*) выходит из режима переходного хаоса. Цифрами показан номер итерации, начиная с единицы, когда изображающая точка попадает в область пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий 3-цикла, что влечет за собой выход системы из режима переходного хаоса.

Нетипичный участок временной реализации начинается в тот момент, когда изображающая точка, двигаясь вблизи неустойчивого многообразия неустойчивого 3-цикла, попадает в окрестность пересечения неустойчивого многообразия с устойчивым многообразием неустойчивого 3-цикла (точка *I* на рис. 2, *b*). После этого изображающая точка начинает посещать области фазовой плоскости  $(x, y)$ , в которых пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия, приближаясь



**Рис. 2** (продолжение).

к неустойчивому циклу периода три. После попадания в окрестность неустойчивого 3-цикла изображающая точка какое-то время находится вблизи него, а затем возвращается вдоль неустойчивого многообразия неустойчивого 3-цикла в область хаотического седла (рис. 2, *b*). Возвращение изображающей точки в область хаотического множества соответствует завершению нетипичного участка временной реализации.

Аналогичный механизм приводит к выходу системы из режима переходного хаоса (рис. 2, *c*). Единственное отличие состоит в том, что изображающая точка попадает в окрестность неустойчивого цикла периода три „с другой стороны“ относительно устойчивого многообразия, после чего, двигаясь вдоль неустойчивого многообразия неустойчивого 3-цикла, изображающая точка за относительно небольшой интервал дискретного времени достигает аттрактора (в рассматриваемом случае — неподвижную точку). В этом смысле устойчивое многообразие неустойчивого цикла является границей, разделяющей на фазовой плоскости области быстрого переходного процесса и переходного хаоса, подобно тому как в случае мультистабильности устойчивое многообразие неустойчивого цикла является границей бассейнов притяжения аттракторов [24,25].

Таким образом, в настоящей работе показано, что во временной реализации динамической системы с дискретным временем, находящейся в режиме переходного хаоса, существуют участки нетипичного поведения, обусловленные приближением изображающей точки к неустойчивому циклу по его устойчивому многообразию и последующим возвращением изображающей точки в область хаотического седла.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 02-02-16351), а также научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

## Список литературы

- [1] *Grebowi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48 (22). P. 1507–1510.
- [2] *Ahlers G., Walden R.W.* // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44 (7). P. 445–448.
- [3] *Zhu L., Raghu A., Lai Y.-C.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86 (18). P. 4017–4020.
- [4] *Dhamala M., Lai Y.-C.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 59 (2). P. 1646–1655.
- [5] *Yin H.W., Dai J.-H.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54 (1). P. 371–375.
- [6] *Короновский А.А., Ремпен И.С., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2002. Т. 66 (12). С. 1754–1760.
- [7] *Woltering M., Markus M.* // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84 (4). P. 630–633.
- [8] *Dhamala M., Lai Y.-C.* // Phys. Rev. E. 1999. V. 60 (5). P. 6176–6179.



- [9] *Dhamala M., Lai Y.-C., Kostelich E.J.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 61 (6). P. 6485–6489.
- [10] *Dhamala M., Lai Y.-C., Kostelich E.J.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056207.
- [11] *Janosi I.M., Tél T.* // Phys. Rev. E. 1994. V. 49 (4). P. 2756–2763.
- [12] *Nusse H.E., Yorke J.A.* // Physica D. 1989. V. 36. P. 137–156.
- [13] *Moresco P.D.S.* // Physica D. 1999. V. 126. P. 38–48.
- [14] *Sweet D., Nusse H.E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86 (11). P. 2261–2264.
- [15] *Hénon M.* // Commun. Math. Phys. 1976. V. 50. P. 69–77.
- [16] *Короновский А.А., Стародубов А.В., Храмов А.Е.* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2002. Т. 10 (5). С. 25–31.
- [17] *Mannville P., Pomeau Yv.* // Physica D. 1980. V. 1 (2). P. 167–241.
- [18] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [19] *Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A.* // Phys. Rev. A. 1987. V. 36 (11). P. 5365–5380.
- [20] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57 (11). P. 1284–1287.
- [21] *Parker T.S., Chua L.O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [22] *You Z.P., Kostelich E.J., Yorke J.A.* // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. V. 1. P. 605–624.
- [23] *Kostelich E.J., Yorke J.A., Yuo Z.* // Physica D. 1996. V. 93. P. 210–222.
- [24] *Grebogi C., Ott E., Jorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56 (10). P. 1011–1014.
- [25] *Nusse H.E., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1995. V. 75 (13). P. 2482–2485.