01;03

О нелинейных поправках к частоте капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости и к критическим условиям реализации ее неустойчивости

© *Д.Ф. Белоножко, А.В. Климов, А.И. Григорьев*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 15 апреля 2003 г.

При расчетах в третьем порядке малости по амплитуде периодической волны на однородно заряженной плоской поверхности идеальной несжимаемой жидкости найдено аналитическое выражение для профиля плоской бегущей капиллярно-гравитационной волны и для нелинейной поправки к ее частоте. Нелинейный анализ критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости с учетом поправки к частоте виртуальной волны показывает, что реальная величина критического значения поверхностной плотности заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны не постоянны, как в линейной теории, а являются функциями амплитуды волны, снижаясь с ее ростом.

1. Исследование закономерностей реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями как академическими, так и техническими и технологическими (см. [1–2] и указанную там литературу). Тем не менее большая часть проведенных теоретических исследований выполнена пока лишь в рамках линейных моделей и только в последние годы появилось несколько публикаций по данной тематике, выполненных с учетом реальной нелинейности феномена [3–6]. Но нелинейных поправок к частотам бегущих капиллярных волн и к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости (к критическим условиям неустойчивости Тонкса–Френкеля), проявляющимся только в третьем

порядке малости по амплитуде волны, пока никто не получил, хотя нелинейные капиллярно-гравитационные волны на незаряженной поверхности идеальной жидкости исследовались неоднократно [7–10]. В этой связи и было проделано настоящее исследование.

2. Математическая формулировка задачи о расчете профиля нелинейных капиллярно-гравитационных волн на однородно заряженной с плотностью σ поверхности идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, имеющей плотность ρ и заполняющей в поле тяжести $\mathbf{g}|| - \mathbf{n}_z$ полупространство $z \leqslant 0$ в декартовой системе координат ($\mathbf{n}_z$-орт оси z), имеет вид:

$$z \leqslant \xi: \quad \Delta\varphi = 0; \;\; p = -\rho g z - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2; \quad z > 0: \quad \Delta\Phi = 0;$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

$$p + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left(1 + \left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\right)^{-3/2}; \qquad \Phi = 0;$$

$$z \to \infty: \quad \mathrm{grad}\,\Phi = -4\pi\sigma\cdot\mathbf{n}_z; \qquad z \to -\infty: \quad \mathrm{grad}\,\varphi = 0;$$

$\xi = \xi(x,t)$ — вызванное волновым движением отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной плоской формы $z = 0$; $\varphi(\mathbf{r},t)$ и $\Phi(\mathbf{r},t)$ — потенциалы поля скоростей внутри жидкости и электрического поля над жидкостью; γ — коэффициент поверхностного натяжения.

3. Решение сформулированной задачи методом многих масштабов (см., например, [8–9]) в третьем порядке малости по амплитуде волны a (которая считается малой по сравнению с естественным линейным масштабом — капиллярной постоянной жидкости) позволяет найти профиль капиллярно-гравитационной волны в виде:

$$\xi = a\cdot\cos[(\omega - a^2\delta)\cdot t - kx] + a^2\cdot\Lambda\cdot\cos\big[2(\omega t - kx)\big]$$
$$+ a^3\cdot\chi\cdot\cos\big[3(\omega t - kx)\big]; \tag{1}$$

$$\omega^2 \equiv gk\left(1 + \alpha^2k^2 - \alpha k\cdot W\right); \quad W \equiv \frac{4\pi\sigma}{\sqrt{\rho g\gamma}}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}};$$

$$\Lambda \equiv k\cdot\frac{1 + \alpha^2k^2 - 2\alpha kW}{2(1 - 2\alpha^2k^2)};$$

$$\chi \equiv k^2 \cdot \frac{32\alpha^2k^2W^2 - 32\alpha kW(\alpha^2k^2+1) + (6\alpha^4k^4 + 21\alpha^2k^2 + 6)}{16(1-2\alpha^2k^2)(1-3\alpha^2k^2)};$$

$$\delta \equiv g \cdot k^3 \cdot \frac{16\alpha^2k^2W^2 - 16\alpha kW(\alpha^2k^2+1) + 2\alpha^4k^4 + \alpha^2k^2 + 8}{16\omega \cdot (2\alpha^2k^2 - 1)};$$

α — капиллярная постоянная жидкости; k — волновое число; W — параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость плоской однородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости.

Полученное в третьем порядке малости выражение для профиля нелинейной волны на свободной заряженной поверхности идеальной жидкости в пределе $W \to 0$ ($\sigma \to 0$) совпадает с известным (см. [8,9,11]) выражением для профиля нелинейных капиллярно-гравитационных волн на незаряженной поверхности идеальной жидкости. Видно, что амплитудный коэффициент поправки второго порядка малости Λ резонансно нарастает при $k = k_2 \equiv 1/(\alpha \cdot 2^{1/2})$. Амплитудный коэффициент поправки третьего порядка малости χ имеет уже два резонанса: при $k = k_2$ и при $k = k_3 \equiv 1/(\alpha \cdot 3^{1/2})$. Как показано в [12], в квадратичном приближении (когда имеется лишь один резонанс при $k = k_2$) при резонансном взаимодействии энергия перекачивается от длинных волн с волновыми числами $k = k_2$ к более коротким с волновыми числами $k = 2k_2$. Из (1) видно, что аналогичным будет и направление перекачки энергии в окрестности резонанса $k = k_3$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами: $k = k_3$ к волнам с $k = 3k_3$, но сам эффект будет иметь более высокий порядок малости.

Из (1) также видно, что нелинейная добавка к частоте пропорциональна квадрату амплитуды волны a и отрицательна (в представляющей интерес в смысле исследования устойчивости заряженной поверхности жидкости области значений волновых чисел $k > k_2$), а сам эффект имеет третий порядок малости, что становится очевидным, если в (1) разложить $\cos[(\omega - a^2\delta) \cdot t]$ по степеням $a^2\delta$. Интересно, что нелинейная добавка так же, как и амплитудные множители Λ и χ, имеет резонансный вид. Это означает ограниченную применимость выражения (1) в окрестности волновых чисел $k = k_2$ и $k = k_3$, поскольку как амплитудные множители, так и добавка к частоте должны быть лишь малыми поправками к величинам первого порядка малости.

Учтем теперь, что критические условия реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля определяются условиями прохождения через ноль квадрата частоты виртуальной волны и равенством нулю первой производной от частоты по волновому числу (из последнего условия определяется волновое число капиллярной волны, обладающей максимальным инкрементом неустойчивости) [13,14]. При расчетах в линейном приближении критическое значение параметра Тонкса–Френкеля $W = W_*$ и волнового числа $k = k_*$ получаются в виде [12]:

$$W_* = k_* + \frac{1}{k_*}; \qquad k_* = 1.$$

В рассматриваемой нелинейной ситуации система алгебраических уравнений относительно W и k получается весьма громоздкой, но, поскольку нас интересует лишь оценка по порядку величины, представим искомые значения параметра Тонкса–Френкеля и волнового числа в виде разложений по квадрату амплитуды волны в виде

$$W_* \approx 2 - wa^2; \qquad k_* \approx 1 - \kappa a^2.$$

Подставляя такие разложения в систему уравнений для определения критических условий неустойчивости, легко найти: $w = 11/8$ и $\kappa = 23/16$.

Таким образом, нелинейный анализ показывает, что критическая для реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой моды снижаются по сравнению с предсказываемыми линейной теорией.

Отметим также, что расчеты методом многих масштабов в четвертом порядке малости по амплитуде волны показывают, что в нелинейной добавке к частоте отсутствует слагаемое, пропорциональное третьей степени амплитуды. Будет ли отлична от нуля добавка к частоте, пропорциональная четвертой степени амплитуды, можно будет узнать при расчетах пятого порядка малости. Такие расчеты желательно провести, чтобы выяснить дальнейшие тенденции изменения нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости.

4. Заключение. Нелинейная, зависящая от квадрата амплитуды поправка к частоте плоской волны, бегущей по однородно заряженной свободной плоской поверхности идеальной жидкости, появляется в расчетах третьего порядка малости по малой амплитуде, имеет резонансный вид и приводит к появлению нелинейных поправок к критическим условиям реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Критическая для реализации неустойчивости поверхностная плотность заряда и волновое число наиболее неустойчивой волны снижаются в использованном в расчетах третьем порядке малости пропорционально квадрату амплитуды волны.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03–01–00760.

Список литературы

[1] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
[2] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[3] *Жакин А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 94–102.
[4] *Gonzalez A., Castellanos A.* // Phys. Rev. 1994. V. 49. N 4. P. 2935–2940.
[5] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990–2005.
[6] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 7. С. 21–29.
[7] *Wilton J.R.* // Phil. Mag. 1995. V. 29. P. 688–697.
[8] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1970. V. 40. Part 4. P. 671–684.
[9] *Nayfeh A.H.* // J. Fluid Mech. 1971. V. 48. Part 2. P. 385–395.
[10] *NamChul Kim, Lokenath Debnath* // Non-Linear Mechanics. 1999. V. 34. P. 197–220.
[11] *Nayfeh A.H.* // Phys. of Fluids. 1970. V. 13. N 3. P. 545–550.
[12] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ПЖТФ. 2003. Т. 29. В. 8. С. 1–7.
[13] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[14] *Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 11. С. 37