01;09

Применение метода собственных координат для восстановления параметров системы Лоренца при воздействии шумов

© В.В. Афанасьев, Р.Р. Нигматуллин, Ю.Е. Польский

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева
E-mail: vafv@kstu-kai.ru

Поступило в Редакцию 25 февраля 2004 г.

Рассматривается восстановление параметров системы Лоренца при воздействии шумов по порождаемым системой процессам при помощи метода собственных координат. Проведены сравнительные исследования влияния низкочастотных и высокочастотных аддитивных и мультипликативных шумов на относительную погрешность оценки параметров системы. Показано, что метод собственных координат позволяет повысить точность восстановления параметров системы при действии аддитивных шумов.

Нелинейные системы с динамическим хаосом широко используются в системах скрытой передачи информации, а также в коммуникационных системах, использующих динамический хаос в качестве источника колебаний, несущих информацию [1]. Важным аспектом создания эффективных систем передачи информации такого типа является возможность идентификации нелинейных систем, порождающих хаотические сигналы, с восстановлением параметров нелинейных систем при воздействии шумов и помех.

Эффективным средством определения параметров зашумленных структур, описываемых системами нелинейных дифференциальных уравнений, является метод собственных координат [3]. Этот метод позволяет преобразовать функции $y(x,V)$ (x — независимая переменная, V — исходный вектор параметров) в соотношения вида

$$Y(x) = C_1(V)X_1(x) + \ldots + C_k(V)X_k(x) \tag{1}$$

через дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции. Соотношение (1) дает возможность оценить V по реализациям процессов, порождаемых нелинейными системами, не прибегая к аналитическому решению исходных систем нелинейных дифференциальных уравнений. Оценка параметров нелинейных систем по методу собственных координат проводится путем преобразования дифференциальных уравнений в интегральные с последующим оригинальным применением процедуры линейной регрессии [3].

Целью работы является исследование возможности применения метода собственных координат для восстановления параметров нелинейной системы с динамическим хаосом при воздействии шумов.

В качестве объекта исследования взята наиболее изученная динамическая система Лоренца

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad \dot{Y} = -XZ + rX - Y, \quad \dot{Z} = XY - bZ, \tag{2}$$

(где X, Y, Z — переменные; r, σ, b — параметры системы [2]), используемая для формирования хаотических сигналов и описания динамики процессов в целом ряде многомодовых нелинейных устройств систем.

В работе при помощи имитационного моделирования исследовано влияние шумов на качество восстановления параметров динамической системы Лоренца по временны́м рядам переменных X, Y, Z, формируемых путем численного интегрирования системы уравнений (1) по методу Эйлера. Аддитивные и мультипликативные шумы при моделировании вводились в соответствии с

$$\dot{X} = \sigma(1 + m_\sigma)(Y - X) + u_x X_0, \quad \dot{Y} = -XZ + r(1 + m_r)X - Y + u_y Y_0,$$

$$\dot{Z} = XY - b(1 + m_b)Z + u_z Z_0, \tag{3}$$

где m_σ, m_r, m_b определяют относительную интенсивность мультипликативных шумов (флуктуаций параметров системы) по отношению к значениям параметров r, σ, b; u_x, u_y, u_z определяют относительную интенсивность аддитивных шумов по отношению к значениям X_0, Y_0, Z_0 в состоянии равновесия системы ($X_0 = Y_0 = \sqrt{b(r-1)}$, $Z_0 = (r-1)$ [2]). Моделирование m и u проводилось при помощи генераторов случайных чисел.

Параметры системы Лоренца при моделировании выбирались из условия обеспечения динамического хаоса с возникновением странного аттрактора: $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ [2]. Восстановление параметров выполнено по двум методикам для сравнительного анализа их возможностей.

	Шумы	Средние интенсивности шумов (в %), при которых относительная погрешность оценки < 1.5%					
		σ		r		b	
		I	II	I	II	I	II
ВЧ	m	0.5	2	3	5	4	6
шумы	u	0.075	0.025	1.5	0.3	2	0.4
НЧ	m	0.3	1.5	2	3	2.5	4
шумы	u	0.002	0.00065	0.025	0.008	0.07	0.02

Первая методика, служащая базой для сравнения точности восстановления r, σ, b, основана на оценке параметров $\tilde{\sigma}$, $\tilde{r}$, $\tilde{b}$, получаемой из уравнений (2) в соответствии с методом Эйлера:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{N}\sum_i \frac{x_{i+1} - x_i}{h(y_i - x_i)}, \qquad \tilde{r} = \frac{1}{N}\sum_i \frac{\frac{y_{i+1}-y_i}{h} + x_i z_i + y_i}{x_i},$$

$$\tilde{b} = \frac{1}{N}\sum_i \frac{x_i y_i - \frac{z_{i+1}-z_i}{h}}{z_i}, \tag{4}$$

где X_i, Y_i, Z_i — значения временны́х рядов переменных системы на i-м шаге, $i = 1, \dots, N$, h — шаг численного интегрирования. Вторая методика восстановления параметров системы Лоренца основана на использовании метода собственных координат [3].

При имитационном моделировании временны́х рядов X_i, Y_i, Z_i значение N выбиралось не менее 10^4, величина h — не более 1% от периода квазирезонансных колебаний в системе Лоренца [4]. С целью определения влияния спектрального состава шумов на восстановление параметров динамической системы Лоренца в работе проведено сравнительное исследование влияния исходных шумов из (3) и шумов, получаемых путем их низкочастотной цифровой фильтрации. Точность восстановления параметров определялась относительной погрешностью $\tilde{\sigma}$, $\tilde{r}$, $\tilde{b}$.

В таблице представлены полученные значения средних интенсивностей шумов m и u (в%), при которых относительная погрешность оценки параметров системы Лоренца не превышает 1.5% (I соответствует методу собственных координат, II — методике (4)).

Из данных таблицы видно, что метод собственных координат по сравнению с методикой (4) позволяет повысить точность восстановления параметров динамической системы Лоренца при действии аддитивных шумов не менее чем в 3–5 раз, причем низкочастотные шумы оказывают более сильное влияние на погрешность оценивания по сравнению с высокочастотными шумами, что связано с инерционностью нелинейных устройств и систем с хаотической динамикой. Необходимо отметить, что в динамической системе Лоренца инерционность нелинейным образом зависит от амплитуды колебаний переменных X, Y, Z [5], поэтому степень влияния шумов зависит от числа переходов фазовой траектории системы Лоренца в фазовом пространстве между областями с различными состояниями равновесия. Для мультипликативных шумов методика (4) дает преимущество только для шумов с нулевым средним значением, однако для этой методики характерны аномальные погрешности, связанные с близостью к нулю отдельных значений $(X_i - Y_i)$, Y_i, Z_i временны́х рядов процессов, порождаемых системой Лоренца.

Для проверки надежности работы методика восстановления параметров системы Лоренца по методу собственных координат была применена для анализа временны́х рядов X_i, Y_i, Z_i, порождаемых принципиально отличными от системы Лоренца нелинейными системами (Дуффинга, Ван-дер-Поля, фрактальным броуновским движением). Полученные оценки $\tilde{\sigma}$, $\tilde{r}$, $\tilde{b}$ оказались физически нереализуемыми в динамической системе Лоренца и характеризовались аномальным видом регрессионных зависимостей, получаемых по методу собственных координат. Это указывает на принципиальную возможность идентификации заданной системы из набора рассматриваемых нелинейных систем при помощи метода собственных координат.

Выводы:

1. По методу собственных координат возможны идентификация нелинейных систем и восстановление их параметров по порождаемым системами процессам в случае возникновения динамического хаоса и странных аттракторов.

2. Метод собственных координат позволяет, по сравнению со стандартной методикой (4), повысить точность восстановления параметров динамической системы Лоренца при действии аддитивных шумов не менее чем в 3–5 раз.

Список литературы

[1] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002. 252 с.
[2] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
[3] *Nigmatullin R.R.* // Applied Magnetic Resonance. 1998. V. 14. P. 601–633; *Nigmatullin R.R.* // Physica A. 2000. V. 285. P. 547–565; *Al-Hasan M., Nigmatullin R.R.* // Renewable Energy. 2003. V. 28 (1). P. 93–110.
[4] *Афанасьев В.В., Михайлов С.В., Польский Ю.Е., Торопов А.Ю.* // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. В. 23. С. 10–14.
[5] *Афанасьев В.В., Польский Ю.Е.* // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. 1997. № 1. С. 1–5.