03;08

Рассеяние акустической волны на неоднородностях скорости движения среды

© *Н.Н. Розанов, Г.Б. Сочилин*

Научно-исследовательский институт лазерной физики, С.-Петербург
E-mail: rosanov@ilph.spb.su

Поступило в Редакцию 5 февраля 2004 г.

Показано существование и развита теория рассеяния акустических волн на неоднородностях скорости движения жидкости, в которой распространяется волна. Выполненные оценки демонстрируют реальность акустической диагностики подобных неоднородностей.

В движущейся среде скорость распространения волн различной природы зависит не только от характеристик собственно среды (например, ее показателя преломления), но и от скорости движения среды. Для электромагнитного излучения это отвечает релятивистскому эффекту Френеля–Физо частичного увлечения света [1]. Для акустических волн, скорость распространения которых много меньше скорости света, имеет место подобный эффект, причем увлечение является полным [2]. Ранее в литературе рассматривался преимущественно случай пространственно однородной скорости движения среды. В то же время неоднородность скорости движения может приводить к новым интересным эффектам. Так, в наших работах [3] для оптического и [4] для акустического излучения (см. также [5]) показано формирование оптических и акустических невзаимных волноводов и линз (с различающимся знаком фокусного расстояния для встречных направлений звуковых волн) в среде с поперечным (по отношению к основному направлению распространения волн) изменением скорости движения среды, как это имеет место, например, при течении воды в трубе. Еще одним родственным оптическим эффектом служит найденное в нашей работе [6] релятивистское рассеяние (дифракция) электромагнитного излучения на неоднородностях скорости движения диэлектрической среды. Задачей настоящей работы служит анализ акустического аналога этого эффекта. А именно, предполагается теория рассеяния звуковой волны на пространственных неоднородностях скорости гидродинамического движения среды. Представляется, что вытекающая из анализа возможность диагностировать акустическими методами скорость движения среды „в чистом виде“ (даже когда это движение не сопровождается значимым изменением температуры и плотности среды или других ее акустических характеристик) важна для различных приложений.

Исходными служат гидродинамические уравнения неразрывности и Эйлера [2,7]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \tag{1}$$

где ρ и $\mathbf{v}$ — плотность и скорость жидкости, p — давление. Разделим движение среды на „гидродинамическое“ (в отсутствие звуковых волн, индекс 0) и акустическое (штрихованные величины), считая амплитуду звука малой: $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}_0 \ll c_s$, где $c_s = \sqrt{(\partial p/\partial \rho_0)_s}$ — скорость звука в неподвижной среде, а ρ_0 и p_0 не зависят ни от времени t, ни от пространственных координат $\mathbf{r}$. Проводя линеаризацию (1) по штрихованным величинам, получим $p' = c_s^2 \rho'$ и

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{\Delta p'}{\rho_0} = -(\mathbf{v}_0\nabla)\mathbf{v}' - (\mathbf{v}'\nabla)\mathbf{v}_0,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_s^2 \operatorname{div} \mathbf{v}' = -\operatorname{div} p'\mathbf{v}_0. \tag{2}$$

Решаем эту замкнутую систему уравнений по теории возмущений с малой гидродинамической скоростью $\mathbf{v}_0$, полагая $p' = p'_0 + p'_1$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{v}'_1$. Нулевой порядок отвечает $\mathbf{v}_0 = 0$ и обычным акустическим уравнениям [2,7]. В первом порядке

$$\Delta p'_1 - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 p'_1}{\partial t^2} = -f,$$

$$f = \rho_0 \operatorname{div}\big\{(\mathbf{v}'_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}'_0 + (\mathbf{v}'_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \operatorname{div} \mathbf{v}'_0\big\}. \tag{3}$$

Решение (4) имеет вид запаздывающих потенциалов [8]. Если неоднородность скорости движения локализована в ограниченной пространственной области, то в дальней зоне

$$p'_1(\mathbf{R}_0, t) = \frac{1}{c_s R_0} \iiint d\mathbf{r}\, f\left(t - \frac{R_0 - \left(\frac{\mathbf{R}_0 \cdot \mathbf{r}}{R_0}\right)}{c_s}\right). \tag{4}$$

Согласно (4), даже при монохроматической падающей волне рассеянное акустическое излучение в общем случае немонохроматично. Излучение сохранит монохроматичность, если скорость гидродинамического движения $\mathbf{v}_0$ в каждой точке стационарна, т.е. $\partial \mathbf{v}_0/\partial t = 0$. Пусть стационарное гидродинамическое движение со скоростью $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ происходит в конечной области жидкости объема V, которая представляет собой тело вращения с осью симметрии, совпадающей с осью вращения. На эту область падает служащая решением (3) плоская монохроматическая продольная звуковая волна с распределением скорости $\mathbf{v}'_0 = \mathbf{m}A\exp\big(ik(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - i\omega t\big)$, где $\mathbf{m}$ — единичный вектор направления распространения волны, A — амплитуда, $k = 2\pi/\Lambda$ — волновое число, Λ — длина волны. Вычислим рассеяние этой волны на неоднородности скорости $\mathbf{v}_0(\mathbf{r})$ вида

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}), \quad \Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}\in V, \\ 0 & \mathbf{r}\notin V, \end{cases} \tag{5}$$

где $\mathbf{u} = [\boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{r}]$, $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения. После подстановки (5) в (4) получим

$$\begin{aligned} p'_1 = {} & \frac{\rho_0\Omega A\exp(-i\omega t + ikR_0)}{4\pi R_0}\iiint d\mathbf{r}e^{-ik(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m}))} \\ & \times\bigg\{(m_1x_2 - m_2x_1)\big(2\Phi(\mathbf{r})k^2 - 2ik(\mathbf{m}, \operatorname{grad}\Phi)\big) \\ & + \left(m_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - m_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) + ik\left(x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right) \\ & - \left(x_1(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2} - x_2(\mathbf{m}\cdot\nabla)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)\bigg\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления на точку приема. Выбираем цилиндрическую систему координат, в которой $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_\Omega)$, $\varsigma = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$. Учитывая, что $\Phi(\mathbf{r})$ не зависит от угла φ, т.е. $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\varsigma, x_\Omega)$, получим

$$\begin{aligned} p'_1 = {} & \frac{\rho_0\Omega A\exp(-i\omega t + ikR_0)}{2\pi R_0}m_{\perp\Omega}\iiint d\mathbf{r}e^{-ik(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m}))}\varsigma\sin(\varphi - \varphi_m) \\ & \times\left(\Phi k^2 - ik\left(m_{\perp\Omega}\cos(\varphi - \varphi_m)\frac{\partial\Phi}{\partial\varsigma} + m_\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial x_\Omega}\right)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

причем

$$\big(\mathbf{r}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m})\big)=\varsigma\left[n_{\perp\Omega}\cos(\varphi-\varphi_n)-m_{\perp\Omega}\cos(\varphi-\varphi_m)\right]+x_\Omega(n_\Omega-m_\Omega),$$

а $n_{\perp\Omega}$ и $m_{\perp\Omega}$ — величины проекций соответствующих векторов на плоскость (x_1, x_2). Интегрирование проводится по области неоднородности скорости, определяемой продольным размером l и продольной зависимостью радиуса сечения области $a(x_\Omega)$.

Для области неоднородности в виде кругового цилиндра интегралы выражаются через цилиндрические функции [6]. Для области произвольной формы вычисления упрощаются, если их размеры меньше длины звуковой волны Λ. Далее полагаем $ka(x_\Omega), kl \ll 1$. Тогда в низшем приближении найдем

$$p_1'=-\,ik^3\,\frac{\rho_0\Omega A\exp(-i\omega t+ikR_0)}{2R_0}\,m_{\perp\Omega}n_{\perp\Omega}\sin(\varphi_n-\varphi_m)$$
$$\times\big(m_\Omega n_\Omega+m_{\perp\Omega}n_{\perp\Omega}\cos(\varphi_n-\varphi_m)\big)F_m, \tag{8}$$

где $F_m=\int\limits_{-l}^{l}dx_\Omega(a(x_\Omega))^4$ — форм-фактор, определяемый размерами области неоднородности. Для цилиндрической области $F_m=2la^4$, а для области формы шара радиусом l $F_m=\frac{16}{15}l^5$. Из (8) видно, что в направлении падения волны и в обратном направлении рассеяние отсутствует. Если направления падения волны и оси вращения перпендикулярны, то, принимая направление распространения волны за x_1 и полагая $\varphi_m=0$, получим

$$p_1'=ik^3\,\frac{\rho_0\Omega A\exp(-i\omega t+ikR_0)}{4R_0}\,\Psi(\theta_n,\phi_n)F_m,$$
$$\Psi(\theta_n,\phi_n)=\sin^2\theta_n\sin 2\varphi_n. \tag{9}$$

Экстремумы амплитуды рассеяния $\Psi(\theta_n,\phi_n)$, $\Psi_{\max,\min}=\pm1$ достигаются при $\theta_{\max,\min}=\pi/2$, $\phi_{\max}=\pi/4,\ 5\pi/4$, $\phi_{\min}=3\pi/4,\ 7\pi/4$ (два максимума и два минимума).

Максимальная амплитуда давления рассеянной волны $|p'_{1max}|=$ $=\frac{1}{4R_0}\rho_0\Omega k^3F_mA$. Для плоской звуковой волны $p_0'=Ac_s\rho_0$ [2]. Тогда в случае сферической области

$$\eta=\frac{p_1'}{p_0'}=\frac{4}{15}\,k^3l^3\,\frac{l}{R_0}\,\frac{\Omega l}{c_s}. \tag{10}$$

При $\Omega = 2\,\text{rev./s}$, $\Lambda = 2\,\text{m}$, $c_s = 1450\,\text{m/s}$, $l = 0.5\,\text{m}$ и и $R_0 = 100\,\text{m}$ получим $\eta = 3.6 \cdot 10^{-6}$. Эта величина свидетельствует о реальности акустической диагностики неоднородностей гидродинамической скорости. Возможность наблюдения рассеянной волны зависит также от поглощения и рассеяния звука в жидкости, существенно определяемых частотой звука.

Список литературы

[1] *Вуд Р.* Физическая оптика. Л.–М.: ОНТИ, 1936. 895 с.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: 1988. 736 с.
[3] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б., Данилов О.Б.* // Опт. и спектр. 2003. Т. 95. № 6. С. 908–910.
[4] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 11. С. 85–88.
[5] *Альпин А.Я.* Юбилейная научно-техническая конференция СЗО АИН РФ. Сб. трудов. СПб.: Изд. СПбГТУ, 2001. С. 159–170.
[6] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // Опт. и спектр. 2003. Т. 94. № 4. С. 624–631.
[7] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 383 с.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988. 504 с.