01;03;11

Равновесные конфигурации заряженной поверхности проводящей жидкости при конечном межэлектродном расстоянии

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 8 июня 2004 г.

Рассмотрена задача о равновесной конфигурации свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем электрическом поле с учетом конечности межэлектродного расстояния. Установлена аналогия между этой задачей электростатики и задачей нахождения профиля прогрессивной капиллярной волны на поверхности слоя жидкости конечной глубины, решения которой были ранее найдены Киннерсли. Аналогия позволила получить точные решения для геометрии жидких электродов, расширяющие наши представления о возможных стационарных состояниях системы.

Известно, что плоская поверхность проводящей жидкости становится неустойчивой в достаточно сильном электрическом поле [1]. Неустойчивость индуцируется кулоновскими силами, в то время как капиллярные силы играют стабилизирующую роль. Для понимания основных закономерностей поведения системы важно иметь представление о том, при каких условиях возможна и при каких принципиально невозможна взаимная компенсация этих сил. Это определяет необходимость анализа возможных равновесных конфигураций заряженной поверхности жидких электродов.

В работах [2,3] были даны точные решения задачи о равновесной конфигурации поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электрическом поле, что, применительно к анализу возможных конфигураций жидких электродов, соответствует формальному пределу бесконечного межэлектродного расстояния. В основе указанных работ лежала выявленная аналогия с задачей о прогрессивных капиллярных волнах на свободной поверхности глубокой идеальной жидкости, решенной Креппером в 1957 году. Уравнения для двумерного потенциала электрического поля и соответственно для функции гидродинамического тока совпадают с точностью до замен.

В настоящей работе будет продемонстрировано, что, распространяя эту аналогию на случай конечного расстояния между электродами и для капиллярных волн случай жидкости конечной глубины, можно построить точные решения обсуждаемой классической задачи электростатики в ограниченной геометрии. Соответствующие решения для прогрессивных капиллярных волн были найдены Киннерсли в 1976 году [4] и более рациональным способом Кроуди в 1999 году [5].

Выпишем уравнения, определяющие равновесную форму свободной поверхности проводящей жидкости при заданных межэлектродном расстоянии d и разности потенциалов U. Положим, что вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси y прямоугольной системы координат. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $y = -d$, а положение верхнего (плоского твердого) электрода задается уравнением $y = 0$. Введем функцию $\eta(x)$, задающую форму возмущенной поверхности жидкого электрода (мы ограничимся случаем плоской симметрии задачи). Для периодических решений, как следствие несжимаемости жидкости, должно выполняться условие $d = -\lambda^{-1} \int\limits_0^\lambda \eta(x)\,dx$, где λ — период. Распределение потенциала электрического поля Φ описывается уравнением Лапласа:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,$$

которое следует рассматривать совместно с граничными условиями:

$$\Phi = 0, \quad y = 0,$$

$$\Phi = U, \quad y = \eta(x).$$

Равновесный рельеф границы жидкости определяется условием баланса сил, действующих на поверхность:

$$\frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}{8\pi} + \frac{\alpha\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} = p, \quad y = \eta(x),$$

где первое слагаемое в левой части задает электростатическое давление, а второе слагаемое — поверхностное давление (α — коэффициент поверхностного натяжения). Постоянная p имеет смысл разности внешнего и внутреннего давлений.

Сравнивая эти уравнения с уравнениями работы [4], определяющими форму капиллярной волны в системе координат, движущейся с фазовой скоростью c вместе с волной, можно обнаружить, что они совпадают с точностью до замен

$$p \to \rho c^2/2, \quad \Phi \to \sqrt{4\pi\rho}\Psi, \quad \eta \to -\eta, \quad y \to -y.$$

Здесь Ψ — функция тока, гармонически сопряженная с потенциалом скорости, а ρ — плотность жидкости. Воспользовавшись найденными в [4] симметричными решениями этих уравнений (случай Ib в обозначениях Киннерсли), находим следующие неявные параметрические выражения, описывающие распределение электрического поля в межэлектродном промежутке:

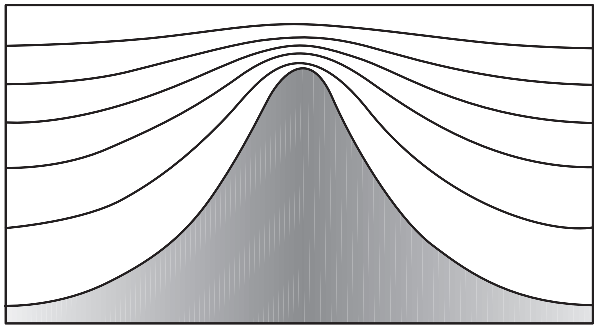
$$x = \frac{\alpha}{2pk'^2}\Big[2E(\psi, k) - k'^2\psi$$

$$- 2k^2 \operatorname{sn}(\psi, k)\operatorname{cd}(\psi, k) + \frac{2kk'^2 \operatorname{sd}(\psi, k)\operatorname{nd}(\psi, k)}{\operatorname{dn}(\varphi, k') - k\operatorname{cd}(\psi, k)}\Big], \tag{1}$$

$$y = \frac{\alpha}{2pk'^2}\left[(1 + k^2)\varphi - 2E(\varphi, k') + \frac{2k'^2 \operatorname{sn}(\varphi, k')\operatorname{cn}(\varphi, k')}{\operatorname{dn}(\varphi, k') - k\operatorname{cd}(\psi, k)}\right]. \tag{2}$$

Здесь sn, cn, dn, sd, cd, nd — эллиптические функции Якоби, E — неполный эллиптический интеграл второго рода, k — модуль эллиптического интеграла, $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — дополнительный модуль, $\varphi = \sqrt{p/(2\pi\alpha^2)}\Phi$ — безразмерный потенциал электрического поля, а ψ — гармонически сопряженная с ним функция. На поверхности жидкости потенциал φ принимает значение $u = \sqrt{p/(2\pi\alpha^2)}U$, так что условие $\varphi = u$ определяет искомую равновесную поверхность в параметрическом виде (ψ играет роль параметра).

Следует отметить, что до сих пор равновесные конфигурации заряженной поверхности жидкостей исследовались лишь в слабонелинейном пределе, когда длина волны значительно превышала амплитуду деформации поверхности (см., например, [6–8] и ссылки там). Выражения (1) и (2) позволяют (без учета гравитации) проанализировать возможные существенно нелинейные конфигурации поверхности, для



Один период стационарного профиля свободной заряженной поверхности проводящей жидкости для $k = 0.2$ и $u = 1.8$. Приведены также эквипотенциальные поверхности $\varphi = 0.3$, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5.

которых амплитуда и длина волны сравнимы (см. рисунок). Важным отличием подобного анализа от анализа Киннерсли является принципиально иная параметризация решений. Если в гидродинамической задаче основным управляющим параметром являлась фазовая скорость волны, то в нашем случае ее аналог лишен какого-либо физического смысла. Для электростатической задачи управляющими параметрами являются разность потенциалов U и межэлектродное расстояние d, причем последнее в явном виде не входит в выражения для решений (1) и (2). Его можно рассчитать по следующей формуле:

$$d = -\lambda^{-1} \int\limits_{0}^{4K(k)} (x_\psi y)\big|_{\varphi=u} d\psi. \tag{3}$$

В качестве параметров, характеризующих решения, удобно использовать длину волны

$$\lambda = \frac{2\alpha}{pk'^2}\left[2E(k) - k'^2 K(k)\right], \tag{4}$$

где $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и соответственно второго рода, а также — амплитуду возмущения поверхности

$$A = \frac{1}{2}(y_{\max} - y_{\min})\big|_{\varphi=u} = \frac{\alpha k}{pk'^2}\,\mathrm{sc}\,(u, k'). \tag{5}$$

Исключая из соотношений (3)–(5) модули k и k', а также разность давлений p, можно получить зависимость амплитуды стационарной волны A от длины волны λ и параметров системы — разности потенциалов U и межэлектродного расстояния d. Анализ подобной зависимости, выходящей за рамки настоящего сообщения, позволит нам в дальнейшем качественно исследовать найденные решения на устойчивость и сформулировать ряд критериев взрывной роста возмущений заряженной поверхности жидкого электрода.

Данная работа выполнена при поддержке президента РФ (проект МК-2149.20042), Фонда содействия отечественной науке, Фонда некоммерческих программ „Династия“ и Международного центра фундаментальной физики в Москве.

Список литературы

[1] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. В. 4. С. 347–350.
[2] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79–83.
[3] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6(12). С. 1990–2005.
[4] *Kinnersley W.* // J. Fluid Mech. 1976. V. 77. N 2. P. 229–241.
[5] *Crowdy D.G.* // J. Nonlinear Sci. 1999. V. 9. P. 615–640.
[6] *Горьков Л.П., Черникова Д.М.* // ДАН СССР. 1976. Т. 228. В. 4. С. 829–832.
[7] *Шикин В.Б., Монарха Ю.П.* Двумерные заряженные системы в гелии. М.: Наука, 1989.
[8] *Шикин В., Лейдерер П.* // ФНТ. 1997. Т. 23. В. 5/6. С. 624–628.