

01;05.2

**Обратный скин-эффект**

© Н.И. Кускова

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины, Николаев

Поступило в Редакцию 20 апреля 2004 г.

Аналитически получены распределения магнитного поля и плотности тока в цилиндрическом проводнике при быстром колебательном изменении внешнего поля. Показано, что при убывании поля имеет место обратный скин-эффект (плотность тока максимальна в центральной части проводника).

Известно [1], что при быстром изменении внешнего электромагнитного поля ( $\sim e^{i\omega t}$ ) с частотой  $\omega$  в достаточно тонком цилиндрическом проводнике ток течет только в тонком поверхностном слое проводника — скин-слое, толщина которого

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \quad (1)$$

где  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\sigma$  — электропроводность.

В работах [1–3] показано, что при экспоненциальном законе изменения тока ( $\sim e^{\beta t}$ ) распределение плотности тока зависит от того, возрастает ток или убывает. Однако чаще всего поля и токи, текущие в электрической цепи, имеют колебательный характер, поэтому интерес представляют аналитические решения уравнения диффузии магнитного поля для случая, когда нестационарное граничное условие на поверхности проводника радиусом  $a$  имеет вид синусоидальной функции.

Процесс диффузии магнитного поля в бесконечно длинный цилиндрический проводник можно описать уравнением диффузии

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\varphi) \right] = \mu\sigma \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, \quad (2)$$

где  $B_\varphi$  — магнитная индукция.

Воспользовавшись методом разделения переменных и выражением  $B_\varphi(r, t) = B(r)b(t)$ , получим два уравнения

$$\mu\sigma \frac{\dot{b}}{b} = \lambda^2, \quad (3)$$

$$\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_\varphi) \right] = \lambda^2, \quad (4)$$

где  $\lambda$  — собственные значения, определяемые из граничного условия  $B(a, t) = B_0 \sin \omega t$ .

Собственные функции для системы уравнений (3), (4) имеют вид

$$B(r, t) = C \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{2n+1} n! (n+1)!} (\lambda r)^{2n+1} \right] \exp \left( \frac{\lambda^2 t}{\mu\sigma} \right). \quad (5)$$

Константу  $C$  определим из условия  $B(a, \pi/2\omega) = B_0$

$$C = \frac{B_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda a)^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}} \exp \left( -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda^2}{\mu\sigma\omega} \right). \quad (6)$$

Для определения собственных значений  $\lambda$  разложим временные составляющие собственных функций и  $\sin \omega t$  в ряды. Вынося общий множитель, получим уравнение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \left[ \left( \frac{\lambda^2}{\mu\sigma\omega} \right)^{2k+1} \cdot \exp \left( -\frac{\pi\lambda^2}{2\mu\sigma\omega} \right) - (-1)^k \right] = 0. \quad (7)$$

Сумма степенного ряда равна нулю, когда все коэффициенты ряда равны нулю. Тогда искомое уравнение можно переписать в виде

$$\left( \frac{\lambda^2}{\mu\sigma\omega} \right)^{2k+1} \exp \left( -\frac{\pi\lambda^2}{2\mu\sigma\omega} \right) = (-1)^k. \quad (8)$$

Извлекая корень  $(2k+1)$ -й степени и умножая (8) на  $\pi/2$ , получим

$$x \exp \left( -\frac{x}{2k+1} \right) = (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

где  $x = \frac{\pi\lambda^2}{2\mu\sigma\omega}$ .

Так как при  $k \rightarrow \infty$   $\exp \left( -\frac{x}{2k+1} \right) \rightarrow 1$ , то  $x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ .

Собственные значения, определяемые уравнением (9),  $\lambda_k^2 \approx \pm l_k^2 \mu \sigma \omega$ , где  $l_0 \approx 0.7$ ;  $l_1 \approx 0.8$ ;  $l_2 \approx 0.9$ ; ...  $l_k \approx 1$ . Так как значения  $l$  достаточно быстро сходятся к единице, примем  $\lambda_1 \approx \pm \sqrt{\mu \sigma \omega}$ ,  $\lambda_2 \approx i \sqrt{\mu \sigma \omega}$  или  $\lambda_1 = \delta^{-1}$ ,  $\lambda_2 = i \delta^{-1}$ , где  $\delta = \sqrt{\frac{1}{\mu \sigma \omega}}$ .

Полученное выражение для толщины скин-слоя (10) отличается от известного (1) в  $\sqrt{2}$  раз.

Учитывая нечетность радиальной части функции (5), необходимо выбрать положительное собственное значение  $\lambda_1$ .

Так как  $(\lambda_2 r)^{2n+1} = (i)^{2n+1} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2n+1} = i(-1)^n \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2n+1}$ , то общий вид полученного приближенного решения при возрастании поля на поверхности проводника ( $\omega t < \pi/2$ )

$$B_1(r, t) \approx C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2n+1} \right] \exp\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (11)$$

а при убывании ( $\omega t < \pi/2$ ) —

$$B_2(r, t) \approx C_2 J_1\left(\frac{r}{\delta}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right), \quad (12)$$

где

$$C_1 = \frac{B_0}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \left(\frac{a}{\delta}\right)^{2n+1}}, \quad C_2 = \frac{B_0}{J_1\left(\frac{a}{\delta}\right)},$$

$J_1\left(\frac{r}{\delta}\right)$  — функция Бесселя первого рода.

При  $\omega t = \pi/2$  для сшивки функций  $B_1(r, t)$  и  $B_2(r, t)$  используем выражение

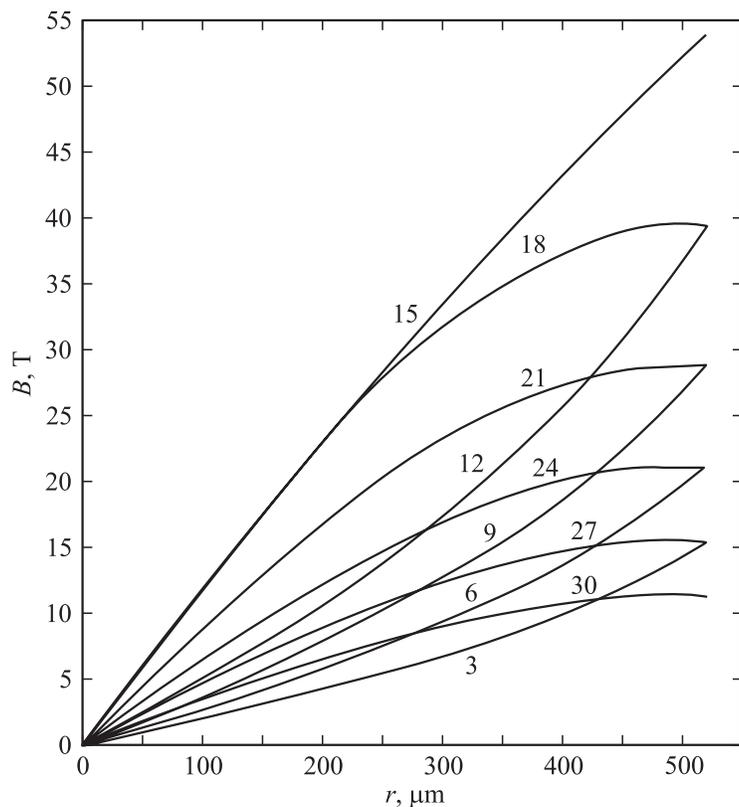
$$B\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{2} \left[ B_1\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) + B_2\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) \right]. \quad (13)$$

Получим радиальное распределение плотности тока  $j_{1,2} = \frac{1}{\mu r} \times \frac{\partial(rB_{1,2})}{\partial r}$

$$j_1(r, t) \approx \frac{C_1}{\mu \delta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left(\frac{r}{\delta}\right)^{2n} \right] \exp\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad (14)$$

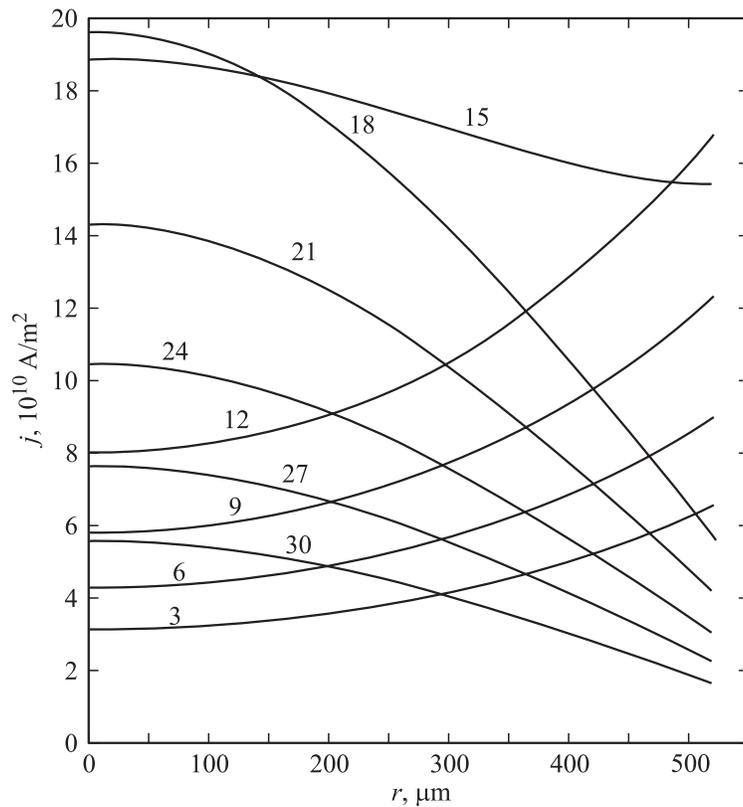
$$j_2(r, t) \approx \frac{C_2}{\mu \delta} J_0\left(\frac{r}{\delta}\right) \exp\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right), \quad (15)$$

$$j\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{1}{2} \left[ j_1\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) + j_2\left(r, \frac{\pi}{2\omega}\right) \right]. \quad (16)$$



**Рис. 1.** Радиальное распределение магнитной индукции в разные моменты времени (цифрами указаны моменты времени в наносекундах).

Пусть проводник имеет радиус  $a_0 = 0.52 \text{ mm}$  и начальную электропроводность  $10^5 \text{ S/m}$ . При частоте колебаний и амплитуде внешнего поля  $B_0 = 54 \text{ T}$  и  $\omega = 10^8 \text{ Hz}$  — соответственно радиальные распределения индукции магнитного поля и плотности тока в различные моменты времени имеют вид, представленный на рис. 1, 2. При возрастании поля кривые распределения магнитной индукции выпуклые, а при убывании — вогнутые. Распределение плотности тока к моменту времени  $t = 12 \text{ ns}$  является неоднородным ( $\delta \approx 2.8 \cdot 10^{-4} \text{ m} < a$ ), затем



**Рис. 2.** Радиальное распределение плотности тока в разные моменты времени (цифрами указаны моменты времени в наносекундах).

начинается перераспределение. Если внешнее поле  $dB/dt \rightarrow 0$ , то распределение плотности тока стремится к однородному ( $t = 15 \text{ ns}$ ). При убывании поля плотность тока максимальна в центре проводника и падает в поверхностном слое.

Сравнение полученного приближенного решения с численным решением работы [3] показало достаточно хорошую их сходимость, отличия обусловлены тем, что численное решение в [3] приведено для полной системы МГД-уравнений (с учетом нагрева и расширения проводника).

Полученные ранее аналитические решения не описывают обратного скин-эффекта, состоящего в том, что при  $\delta \ll a$  и убывании внешнего поля ток течет в основном в центральной части цилиндрического проводника.

## Список литературы

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [2] Кускова Н.И., Ткаченко С.И. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. В. 10. С. 30–34.
- [3] Кускова Н.И., Ткаченко С.И. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 14. С. 59–63.