01;09

Аналитическое обращение гиперсингулярного оператора и его приложения в теории антенн

© С.И. Эминов

Новгородский государственный университет
E-mail: tel@novsu.ac.ru, theorphy@novsu.ac.ru

Поступило в Редакцию 17 мая 2004 г.

Получено аналитическое обращение гиперсингулярного оператора и на его основе построен эффективный численно-аналитический метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Приводятся приложения аналитического обращения гиперсингулярного оператора в теории антенн.

1. Введение. Гиперсингулярным уравнением называется уравнение вида

$$(Au)(\tau) + (Nu)(\tau) = v(\tau), \qquad -1 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{1}$$

где

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt, \tag{2}$$

$$(Nu)(\tau) = \int_{-1}^{1} u(t)N(t,\tau)dt. \tag{3}$$

Соответственно оператор A называется гиперсингулярным. Уравнение (1) возникает при решении многих задач теории дифракции и теории упругости. Кроме того, в теории вибраторных антенн это уравнение является основным. Поэтому уравнению (1) посвящено много работ.

Так, в работах [1,2] предлагается путем интегрирования по частям перейти к сингулярному уравнению относительно производной от неизвестной функции. В работах [3,4] предложены прямые численные методы решения: метод коллокации и метод Галеркина.

Однако во многих прикладных задачах, в частности, в теории возбуждения антенн прямые численные методы неэффективны. И связано это с поведением правой части уравнения (1), т. е. с функцией $v(\tau)$. Последняя может иметь ярко выраженный экстремум и вследствие этого разлагаться в медленно сходящийся ряд. Поэтому прямые численные методы в таких случаях мало эффективны.

В данной работе для решения этой проблемы предлагается новый подход, основанный на аналитическом обращении гиперсингулярного оператора.

2. Аналитическое обращение гиперсингулярного оператора. Гиперсингулярный оператор изучался в работе [4]. При этом оператор записан в другой форме

$$(Au)(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \int\limits_{-1}^{1} u(t) \exp\bigl(ix(t-\tau)\bigr) dt dx. \qquad (4)$$

Оператор A является неограниченным в пространстве $L_2[-1, 1]$, поэтому под равенством операторов, определяемых формулами (2) и (4), полагается равенство на плотном множестве. Последнее непосредственно проверяется с помощью известного соотношения

$$\ln \frac{1}{|\tau - t|} = C + \int\limits_0^1 \frac{\cos(\tau - t)x - 1}{x} dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(\tau - t)x}{x} dx,$$

где C — постоянная Эйлера.

В работе [4] доказано, что оператор A имеет плотную в $L_2[-1, 1]$ область определения, является симметричным и положительно определенным оператором. Это позволяет ввести энергетическое пространство H_A оператора A. Также в аналитическом виде указан ортонормированный базис энергетического пространства H_A в виде

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\bigl[n \arccos(\tau)\bigr] = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{1-\tau^2}\, U_n(\tau), \ \ n = 1, 2, 3, \dots, \qquad (5)$$

$$(A\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}. \qquad (6)$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в $L_2[-1, 1]$, а $U_n(\tau)$ — полиномы Чебышева второго рода: $U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$ и т. д.

Ввиду важности соотношения (6) приведем его доказательство. При этом воспользуемся известным соотношением для полиномов Чебышева первого рода [2]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos(n\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt=\frac{1}{n}\cos\bigl(n\arccos(\tau)\bigr),\qquad n\geqslant 1. \tag{7}$$

В выражении $A\varphi_m$ проведем последовательно интегрирование по частям, вычисление интеграла с помощью (7) и, наконец, дифференцирование. В результате получим

$$A\varphi_n=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sin\bigl(m\arccos(t)\bigr)\,\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\,dt\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\pi}\,m\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos(m\arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\,dt\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\cos\bigl(m\arccos(\tau)\bigr)=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,\frac{\sin(m\arccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}\,m. \tag{8}$$

Отсюда имеем

$$(A\varphi_m,\varphi_n)=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,m\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sin(m\arccos(\tau))\sin(n\arccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}\,dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi m}}\,m\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\int\limits_{0}^{\pi}\sin(m\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

Тем самым соотношение (6) доказано.

Теперь обратимся к уравнению, которое содержит лишь гиперсингулярный оператор

$$(Au)(\tau)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1}u(t)\,\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt=v(\tau),\qquad -1\leqslant\tau\leqslant 1. \tag{9}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(t). \tag{10}$$

Подставим (10) в (9) и умножим обе части на φ_m в $L_2[-1, 1]$. С учетом (6) найдем

$$c_n = (y, \varphi_n).$$

Следовательно, решение уравнения (9) имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (v, \varphi_n)\varphi_n(t). \tag{11}$$

Перепишем этот ряд с учетом определения (5) базисных функций $\varphi_n(t)$

$$u(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} v(t) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\bigl(n \arccos(t)\bigr) \sin\bigl(n \arccos(\tau)\bigr) \right) dt. \tag{12}$$

Наконец, воспользуемся известной суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin x \sin x' = \frac{\ln 2}{2} + \ln\left|\sin \frac{x + x'}{2}\right| - \frac{1}{2} \ln|\cos x - \cos x'|. \tag{13}$$

В результате получим окончательное решение уравнения (9)

$$u(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} v(t) \left(\frac{\ln 2}{2} + \ln \sin \frac{\theta(t) + \theta(\tau)}{2} - \frac{1}{2} \ln|\tau - t| \right) dt, \tag{14}$$

где $\theta(t) = \arccos(t)$.

Таким образом, в аналитическом виде получено решение уравнения (4), т.е. получено аналитическое обращение гиперсингулярного оператора.

3. Сведение гиперсингулярного уравнения к бесконечной системе Фредгольма второго рода. Численно-аналитический метод решения.

Обратимся к исходному гиперсингулярному уравнению

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\,dt+\int\limits_{-1}^{+1} u(t)N(t,\tau)dt=v(\tau),\ \ -1\leqslant\tau\leqslant 1. \quad (15)$$

Для решения этого уравнения разложим неизвестную функцию по базису

$$u(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\varphi_n(t) \quad (16)$$

и сведем уравнение (15), рассматриваемое в пространстве H_A, к эквивалентной бесконечной системе в пространстве последовательностей l_2

$$c_n+\sum_{m=1}^{+\infty} c_m N_{mn}=v_n, \qquad 1\leqslant n\leqslant+\infty, \quad (17)$$

где

$$N_{mn}=\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} N(t,\tau)\varphi_m(t)\varphi_n(\tau)dtd\tau,$$

$$v_n=\int\limits_{-1}^{+1} v(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau.$$

Если оператор $A^{-1}N$ вполне непрерывен в пространстве H_A, то уравнение (17) будет уравнением Фредгольма второго рода в пространстве последовательностей l_2, т.е. матричные элементы N_{mn} образуют вполне непрерывный оператор. Один из критериев вполне непрерывности оператора $A^{-1}N$ в пространстве H_A приведен в работе [4].

Перейдем к вопросам решения бесконечной системы (17). Во многих задачах математической физики бесконечная система эффективно решается методом усечения. Приближенное решение находится из решения усеченной системы

$$\tilde{c}_n+\sum_{m=1}^{M}\tilde{c}_m N_{mn}=v_n, \qquad 1\leqslant n\leqslant M. \quad (18)$$

А приближенное решение гиперсингулярного уравнения находим по формуле

$$u(t) = \sum_{n=1}^{M} \tilde{c}_n \varphi_n(t).$$

Скорость сходимости метода усечения зависит также от скорости убывания правой части системы (17). Во многих прикладных задачах правая часть системы убывает медленно и поэтому метод усечения оказывается неэффективным. Для решения этой проблемы в данной работе предлагается новый численно-аналитический метод. Решение бесконечной системы (17) будем искать в виде

$$c_n = v_n + c_n^{\bullet}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (17), получим

$$c_n^{\bullet} + \sum_{m=1}^{+\infty} c_n^{\bullet} N_{mn} = -\sum_{m=1}^{+\infty} v_m N_{mn}. \tag{20}$$

Правая часть этой системы уже убывает быстро, в силу того, что матричные элементы N_{mn} определяют вполне непрерывный оператор. Решив систему (20) методом усечения и учитывая (19), найдем решение гиперсингулярного уравнения (15) в виде

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \varphi_n(t) + \sum_{n=1}^{M} \tilde{c}_n^{\bullet} \varphi_n. \tag{21}$$

Здесь $\tilde{c}_n^{\bullet}$ — решение усеченной системы, соответствующей (20). Применяя формулу (14) аналитического обращения гиперсингулярного оператора, получим решение (21) в виде

$$u(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} v(t) \left(\frac{\ln 2}{2} + \ln \sin \frac{\theta(t) + \theta(\tau)}{2} - \frac{1}{2} \ln |\tau - t| \right) dt + \sum_{n=1}^{M} \tilde{c}_n^{\bullet} + \varphi_n. \tag{22}$$

4. Гиперсингулярное уравнение вибраторных антенн. Гиперсингулярное уравнение относительно тока $I(\tau)$, текущего по поверхности вибраторной антенны, имеет вид [4]

$$\beta(AI)(\tau) + (NI)(\tau) = v(\tau), \qquad -1 \leqslant \tau \leqslant 1, \tag{23}$$

где

$$(NI)(\tau) = \frac{l}{2\pi^2} \int\limits_0^{+\infty} \left[(x^2-1)I_0(\sqrt{x^2-1}a)K(\sqrt{x^2-1}a) - \frac{x}{2a}\right]$$

$$\times \int\limits_{-1}^{+1} I(t)\cos(lx(\tau - t))dt\,dx,$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi l a}, \quad v(\tau) = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(\tau),$$

где I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя, E^0 — первичное электрическое поле, ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости, $2l$ — электрическая длина, a — электрический радиус вибратора.

В теории вибраторных антенн, как и в целом в математической физике, широко используется модель дельта-функции, когда первичное поле представляется в виде

$$E^0(\tau) = U_0\delta(\tau), \tag{24}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака, а U_0 — амплитуда напряжения.

Однако при строгом решении уравнения (23) такая модель неприменима. Из формул аналитического обращения следует, что решение уравнения (23) обратится в бесконечность. Поэтому в данной работе первичное поле представим в виде

$$E^0(\tau) = \frac{U_0}{2T}\begin{cases} 1, & |\tau| \leqslant T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \tag{25}$$

Когда параметр T стремится к нулю, функция (25) стремится к дельта-функции (24) в интегральном смысле.

N	Метод Галеркина		Численно-аналитический метод	
	ReZ	ImZ	ReZ	ImZ
2	91.347	51.292	115.41	22.880
5	100.53	44.011	116.59	19.332
10	105.44	38.999	116.62	19.431
15	107.95	35.854	116.54	19.682
20	109.65	33.467	116.49	19.822

Интеграл (14) в этом случае удается вычислить в явном виде

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} E^0(t)\left(\frac{\ln 2}{2} + \ln\sin\frac{\theta(t)+\theta(\tau)}{2} - \frac{1}{2}\ln|\tau - t|\right)dt$$

$$= U_0\frac{f(T,\tau) - f(-T,\tau)}{\pi T}, \tag{26}$$

где

$$f(t,\tau) = \frac{\ln 2}{2}t + \frac{1}{2}\ln\frac{1 - t\tau + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\tau^2}}{2}(t-\tau)$$

$$-\frac{\theta(t)\sqrt{1-\tau^2}}{2} - \frac{(t-\tau)\ln(t-\tau)}{2}.$$

Анализ формулы (26) позволяет обнаружить различные свойства. Если $T = 1$, то правая часть (26) удовлетворяет условию Мейкснера на ребре. Если положить $\tau = 0$, то при $T \to 0$ правая часть (26) стремится к бесконечности логарифмически, отсюда неприменимость модели (24).

В заключение приведем некоторые результаты решения гиперсингулярного уравнения (23), найденные по формуле (22) для параметров: $I = \pi/2$, $a = l/20$, $T = 0.01$.

В таблице приведены результаты расчета входного сопротивления, определяемого по формуле

$$Z = \frac{U_0}{I(0)},$$

в зависимости от числа базисных функций.

Таблица демонстрирует низкую сходимость метода Галеркина и, напротив, высокую сходимость численно-аналитического метода.

Список литературы

[1] *Каландия А.И.* Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973.
[2] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984.
[3] *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО „Янус“, 1975.
[4] *Эминов С.И.* // Радиотехника и электроника. 1993. Т. 38. № 12. С. 2160–2168.