

01

О возможности управления движением спиральных волн в двумерной решетке возбудимых элементов при помощи топологических дефектов

© К.В. Андреев, Л.В. Красичков

Саратовский государственный университет
E-mail: kandreev@cas.ssu.runnet.ru, lvk@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 25 февраля 2005 г.

Исследуется автоволновая динамика двумерной решетки возбудимых элементов ФитцХью–Нагумо при наличии точечных топологических дефектов. Показана возможность дрейфа ядра спиральной волны по линии, составленной из дефектов. Обсуждается возможность управления движением спиральных волн в возбудимых и осциллирующих средах.

Автоволновое поведение наблюдается в нелинейных активных средах различной природы [1,2]. Автоволны могут реализовываться в физических системах (жидкость в осциллирующем гравитационном поле, решетки джозефсоновских контактов), химических реакциях (реакция Белоусова–Жаботинского в чашке Петри), а также биологических системах (спиральные волны в коре головного мозга животных и человека [3], автоволны в мышечной ткани). В связи с универсальностью автоволновых явлений актуальной и важной задачей представляется изучение методов управления пространственно-временной динамикой систем с автоволновым поведением.

Данная работа посвящена исследованию возможности управления движением спиральных волн при помощи топологических дефектов. Для нелинейных активных сред известно, что в процессе эволюции ядро спиральной волны испытывает смещение, которое может быть как регулярным, так и нерегулярным [1]. Если ядро спиральной волны в возбудимой среде оказывается вблизи топологического дефекта, то оно может быть захвачено данным дефектом, после чего вращение спиральной волны будет происходить вокруг дефекта. В работе [4] на модели Баркли [5] было показано, что ядро спиральной волны может двигаться

по среде за электродом, обеспечивающим возмущение в заданной точке среды. В работах [6,7] на двумерной решетке кусочно-линейных отображений [8], качественно описывающих динамику нейронов, было показано, что возможно организовать движение ядра спиральной волны вдоль по цепочке, составленной из точечных дефектов. Обнаруженный эффект оказался принципиально новым, не описанным в литературе, однако система, в которой он наблюдался, является дискретной и по временной, и по пространственной координате. Кроме того, исследованная в работах [6,7] среда является автоколебательной. В связи с этим представляет интерес рассмотреть возможность движения ядра спиральной волны по цепочке, составленной из дефектов, на классической модели возбудимой среды.

Рассмотренная в работах [6,7] модель построена для описания пространственно-временной динамики решеток нейронов, поэтому в качестве модели возбудимой среды было предложено использовать решетку элементов, моделируемых системой ФитцХью–Нагумо [9,10]. Данная модель описывает распространение электрического импульса в нервном волокне и является классическим примером возбудимой среды [1,2]. В случае двумерной решетки модель можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dx_{i,j}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{1}{3} x_{i,j}^3 + x_{i,j} - y_{i,j} \right) + I_{i,j}, \\ \frac{dy_{i,j}}{dt} = x_{i,j} - ay_{i,j} + b, \end{cases} \quad (1)$$

где $i, j = 1, 2, \dots, N$; a, b, ε — постоянные параметры, одинаковые для всех элементов решетки; рассматривается двумерная решетка при $N = 100$. Слагаемое $I_{i,j}$ задает взаимодействие между элементами в решетке и может быть записано в следующем виде:

$$I_{i,j} = D(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 4x_{i,j}). \quad (2)$$

Коэффициент D определяет величину связи между элементами в решетке, учтена связь только с 4 ближайшими соседями. Численное моделирование (1), (2) проводилось при условии нулевого потока на границах.

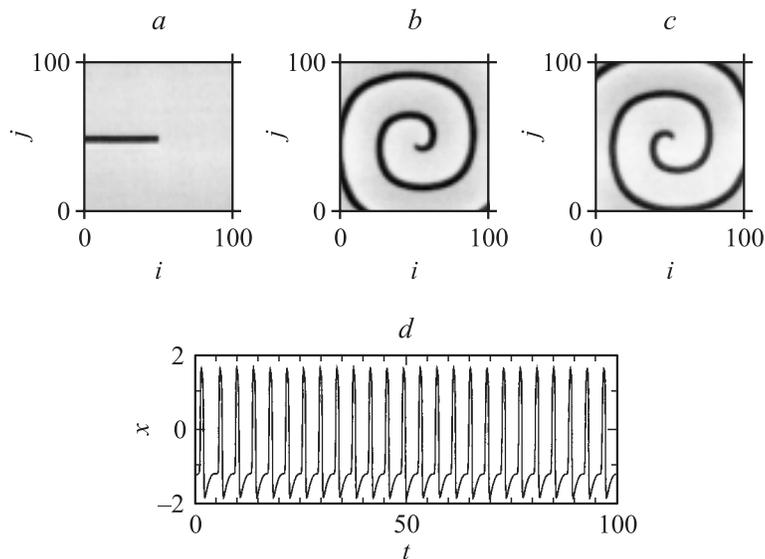


Рис. 1. Мгновенные распределения амплитуды переменной состояния решетки элементов ФитцХью–Нагумо (1), (2): a — начальное распределение переменных состояния, заданное в виде обрыва волнового фронта, приводящее к формированию уединенной спиральной волны b, c ; d — характерный вид зависимости переменной состояния x от времени для системы ФитцХью–Нагумо; $a = 1$, $b = 0.55$, $\varepsilon = 15$, $D = 5$.

Вообще говоря, задачу вида (1), (2) можно трактовать как численную схему для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих сплошную возбудимую среду [2]. Однако если ограничиться рассмотрением задачи о динамике ансамбля нейронов, то среда должна считаться изначально дискретной.

Известно [2], что в модели вида (1), (2) в широком диапазоне изменения параметров могут наблюдаться автоволновые явления. Для возбуждения в системе уединенной спиральной волны необходимо выбрать начальные условия в виде обрыва волнового фронта (рис. 1, a). Пример пространственно-временной динамики решетки в случае распространения уединенной спиральной волны показан на рис. 1, b, c . Характерный вид временной реализации, снимаемой с отдельного элемента решетки, представлен на рис. 1, d .

Для моделирования точечного дефекта, находящегося в узле решетки с координатами (i, j) , будем считать, что данный элемент является изолированным от решетки, т.е. не оказывает влияния на соседние элементы. Его собственная динамика при этом не представляет интереса.

Рассмотрим поведение уединенной спиральной волны при наличии в решетке топологических дефектов. Если дефекты являются точечными и распределены по решетке случайным образом, то спиральная волна не разрушается при относительно небольшом количестве дефектов (до нескольких процентов от общего числа элементов решетки). В процессе эволюции ядро спиральной волны испытывает смещение и может оказаться вблизи одного из дефектов. При этом будет иметь место захват ядра спиральной волны точечным дефектом. Эффект вращения ядра спиральной волны вокруг топологического дефекта будет наблюдаться и в том случае, если дефект не является точечным.

Предположим, что в решетке сформирована уединенная спиральная волна и точечные дефекты расположены таким образом, что образуют „дорожку“, проходящую вблизи ядра волны (рис. 2, *a*). В этом случае при движении спиральной волны ее ядро будет захвачено одним из точечных дефектов. Если расстояние между дефектами относительно невелико, то ядро спиральной волны не „прилипает“ к определенному дефекту, а перемещается между соседними дефектами. Таким образом, оказывается возможным осуществить движение спиральной волны по дорожке, составленной из дефектов (рис. 2, *a, b*). Очевидно, что если расстояние между дефектами будет достаточно большим, то движение ядра окажется невозможным. Численные эксперименты показали, что при выбранных параметрах системы (1), (2) максимальное значение расстояния между дефектами, при котором имеет место дрейф ядра спиральной волны, составляет 6 элементов решетки. Можно предположить, что данное расстояние определяется диаметром ядра волны и может меняться при изменении параметров системы (1), (2).

Для оценки направления и скорости перемещения ядра волны могут быть применены пространственно-временные диаграммы, построенные для столбца решетки, находящегося вблизи столбца с дефектами. Поскольку внутри ядра спиральной волны колебания отсутствуют (а вблизи ядра амплитуда колебаний значительно ниже, чем в остальных элементах решетки), то на пространственно-временной диаграмме ядро

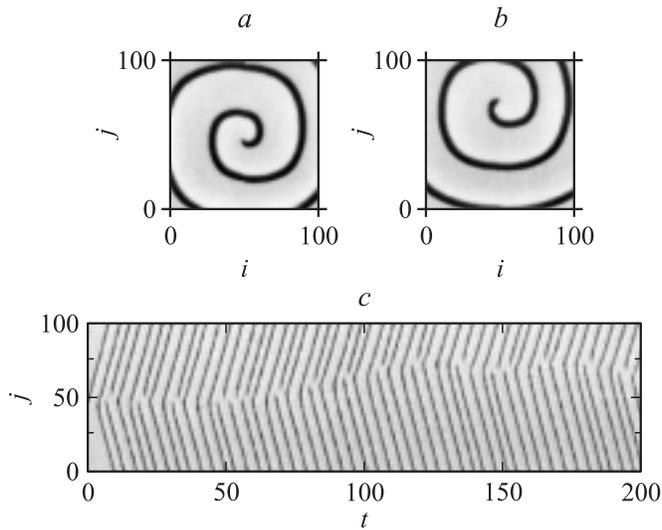


Рис. 2. a – b — мгновенные распределения амплитуды переменной состояния решетки элементов ФитцХью–Нагумо (1), (2), иллюстрирующие движение спиральной волны вдоль линии $i = 50$, состоящей из дефектов (показаны черными точками), находящихся на расстоянии 4 элементов решетки друг от друга; c — пространственно-временная диаграмма, соответствующая (a), (b), построенная для столбца $i = 48$; $a = 1$, $b = 0.55$, $\varepsilon = 15$, $D = 5$.

оставляет светло-серый след (рис. 2, c). По тангенсу угла наклона данного следа можно определить направление и среднюю скорость перемещения ядра спиральной волны.

Таким образом, в работе показано, что обнаруженная на решетках кусочно-линейных отображений особенность взаимодействия спиральной волны с точечными дефектами, а именно перемещение ядра спиральной волны вдоль дорожки из дефектов, наблюдается и в классической модели возбудимой среды, описываемой системой ФитцХью–Нагумо. Обнаруженный эффект открывает возможности для управления движением спиральных волн при помощи введения точечных дефектов. Следует отметить, что в силу универсальности автоволновых явлений полученные результаты могут быть обобщены на возбудимые среды различной природы.

Работа выполнена при поддержке гранта CRDF BRHE REC–006.

Список литературы

- [1] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
- [2] Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичков Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М.: Физматлит, 2002.
- [3] Prechil J.C., Cohen L.B., Pesaran B. et al. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1997. V. 94. P. 7621–7626.
- [4] Krinsky V., Plaza F., Voignier V. // Phys. Rev. E. 1995. V. 52. N 3. P. 2458–2462.
- [5] Barkley D., Kness M., Tuckerman L. // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. N 4. P. 2489–2492.
- [6] Андреев К.В., Красичков Л.В. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2002. Т. 66. № 12. С. 1777–1782.
- [7] Андреев К.В., Красичков Л.В. // Изв. РАН. Сер. Физ. 2003. Т. 67. № 12. С. 1701–1704.
- [8] Андреев К.В., Красичков Л.В. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 3. С. 46–52.
- [9] FitzHugh R. // Biophys. J. 1961. V. 1. P. 445.
- [10] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. // Proc. IRE. 1962. V. 50. P. 2061–2070.