01;03

Нелинейные движения свободной поверхности заряженной капли сильно вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
E-mail: grig@uniyar.ac.ru

Поступило в Редакцию 8 февраля 2005 г.

Путем прямого разложения по амплитуде многомодовой начальной деформации равновесной сферической формы капли во втором порядке малости найдена форма образующей нелинейно осесимметрично осциллирующей заряженной капли сильно вязкой несжимаемой электропроводной жидксти. Полученное выражение позволяет исследовать временну́ю эволюцию формы деформированной в начальный момент времени капли при зарядах как докритических, так и закритических в смысле рэлеевской устойчивости.

1. Аналитические исследования нелинейных осцилляций заряженных капель начались около двух десятилетий назад, и их библиография насчитывает уже более полусотни работ, но все проведенные к настоящему времени исследования выполнены лишь в приближении идеальной жидкости [1–4]. Очевидная причина такого положения — значительная громоздкость расчетов нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости. Тем не менее, как показано ниже, нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости вполне доступны для аналитического анализа в рамках простого асимптотического метода прямого разложения по амплитуде начальной деформации, по крайней мере, в квадратичном по амплитуде начальной деформации приближении. Наиболее простой вид результаты расчетов имеют для ситуации большой вязкости жидкости (см. [4]), когда движения жидкости, связанные с различными модами осцилляций капли, начинают становиться апериодическими. Полученное в такой ситуации аналитическое выражение для образующей поверхности капли вязкой жидкости, совершающей осесимметричные движения конечной амплитуды, применимо как при

малых зарядах капли, так и при закритических в смысле устойчивости капли по отношению к собственному заряду.

2. Пусть имеется сферическая капля радиусом r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющая электрический заряд Q. Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим $\mathbf{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений — $p(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$ соответственно. Уравнение поверхности капли, совершающей осесимметричные колебания, в произвольный момент времени t запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ в виде

$$F(r, \vartheta, t) \equiv r - r_0 - \xi(\vartheta, t) = 0.$$

Начальную деформацию равновесной сферической поверхности капли зададим в виде суперпозиции нескольких виртуально возбужденных мод:

$$t = 0: \qquad \xi = \varepsilon \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \quad \mu \equiv \cos(\vartheta); \quad \sum_{m \in \Omega} h_m = 1,$$

где ε — малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\mu)$ — полином Лежандра порядка m; Ω — множество индексов изначально возбужденных мод.

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных осесимметричных капиллярных колебаний заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости имеет вид

$$\partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{U}; \qquad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \qquad \Delta \phi = 0,$$

$$t = 0: \quad \mathbf{U} = 0; \qquad r \to 0: \quad \mathbf{U} < \infty; \qquad r \to +\infty: \quad \boldsymbol{\nabla} \phi \to 0;$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \qquad \phi = \phi_S(t); \qquad \partial_t F + (\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\nabla})F = 0;$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0; \quad -p + 2\rho\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} - p_Q + p_\sigma = 0;$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi dS = -4\pi Q;$$

$$S = \left\{ r, \vartheta, \varphi \middle| r = r_0 + \xi; \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \right\};$$

$$\int_V r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$V = \left\{ r, \vartheta, \varphi \middle| 0 \leqslant r \leqslant r_0 + \xi; \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \right\};$$

$$\int_V \mathbf{r}\, r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = 0.$$

Символ ∂_t означает частную производную по переменной t; $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и внешней нормали к свободной поверхности капли; p_σ и p_Q — давления сил поверхностного натяжения и электрического поля собственного заряда.

3. Решение выписанной системы в квадратичном по малому параметру ε приближении можно найти стандартным методом прямого разложения с использованием преобразований Лапласа по времени. Аналитическое выражение для образующей капли сильно вязкой (когда $(\nu \cdot \rho^{1/2}/(r_0\sigma)^{1/2}) \geqslant 1$ [5]) несжимаемой электропроводной жидкости, свободная поверхность которой совершает движения конечной амплитуды, имеет вид

$$r(\vartheta, t) = r_0 + \varepsilon \sum_{n\in\Omega} h_n \exp\left(-\tau_n\beta_n \frac{r_0^2\omega_n^2}{2\nu} t\right) P_n(\mu)$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{r_0} \sum_{m\in\Omega} \frac{h_m}{2m+1} \exp\left(-\tau_m\beta_m \frac{r_0^2\omega_m^2}{\nu} t\right) P_0(\mu)$$

$$- \frac{9\varepsilon^2}{r_0} \sum_{m\in\Omega} \frac{(m+1)h_m h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)} \exp\left(-\tau_m\beta_m \frac{r_0^2\omega_m^2}{2\nu} t - \tau_{m+1}\beta_{m+1} \frac{r_0^2\omega_{m+1}^2}{2\nu} t\right) P_1(\mu)$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \xi_n^{(2)}(t) \cdot P_n(\mu); \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
\xi_n^{(2)}(t) = \sum_{k,m\in\Omega} \Bigg\{ \Bigg\{ & \exp\left(-(\tau_k\beta_k\omega_k^2 + \tau_m\beta_m\omega_m^2)\frac{r_0^2}{2\nu}\,t\right) \\
& - \exp\left(-\tau_n\beta_n\omega_n^2\,\frac{r_0^2}{2\nu}\,t\right)\Bigg\} \\
& \times \frac{2n+1}{(n-1)(2n(n+2)+3)} \times \frac{h_k h_m}{\tau_n\beta_n\omega_n^2 - \tau_k\beta_k\omega_k^2 - \tau_m\beta_m\omega_m^2} \\
& \times \Bigg\{ \frac{n\sigma}{\rho r_0^4}\,K_{kmn}\Big(2\big(k(k+1)-1\big) + \big(3+k(m+1) \\
& - m(7+2m-2n)\big)\frac{W}{2}\Big) + \frac{W}{2}\,\frac{n\sigma}{\rho r_0^4}\,\alpha_{kmn} - \left(K_{kmn} + \frac{\alpha_{kmn}}{km}\right)\frac{n\omega_k^2}{2r_0} \\
& \times \frac{(2k+1)(m-1)(m+1)(2m+3)}{(k-1)(2k(k+2)+3)(2m+1)} - \frac{1}{2kmr_0}\Big(km\big(6(2k+1) \\
& \times (m-1) + \big(20m - k\big(k(2k+3)(2m+1) - 2(16m+5)\big) + 7\big)n \\
& + 2\big(7m + k\big(6(m+3) - k(2k+3)(2m+1)\big) + 11\big)n^2 \\
& - 4(2k+1)(m-1)n^3\big)K_{kmn} + \big(3(2m+1)n(2n+1) \\
& - 2k^3(2m+1)n(2n+1) + 2k\big(2n\big(m+2+2(m-1)n-3n^2\big)+9\big) \\
& - 3k^2\big(n\big(2n(2m+4n+5)+2m-3\big)-12\big)\alpha_{kmn} + 6k(2k+1) \\
& \times n(n+1)\big(m\big(m(2m-1)-4\big)\Gamma_{kmn} + 3\Lambda_{kmn}\big)\omega_m^2/\big((2k+1) \\
& \times (m-1)\big(2m(m+2)+3\big)(2n+1)\big)\Bigg\}\Bigg\};
\end{aligned}
$$

$$
\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3}\,n(n-1)(n+2-W); \qquad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3};
$$

$$
\tau_n = \frac{(2n+1)(2n+5)(n-1)(2n^2+4n+3)}{3(4n^3+8n^2+6n+3)};
$$

$$\beta_n = \frac{3(4n^3+8n^2+6n+3)}{(2n+5)(n-1)^2(2n^2+4n+3)^2};$$

$$\alpha_{kmn} = -C^{n0}_{k0m0} \cdot C^{n0}_{k(-1)m1} \cdot \sqrt{k(k+1)m(m+1)}; \quad K_{kmn} = \left(C^{n0}_{k0m0}\right)^2;$$

$$\Gamma_{kmn} = \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{\alpha_{nmk}}{(2k+1)};$$

$$\Lambda_{kmn} = \frac{2n+1}{n(n+1)}\left(-\frac{m^2}{2m+1}\,\alpha_{nkm} + \sum_{j=1}^{[m/2]} \alpha_{n,k,m-2j}\right);$$

C^{n0}_{k0m0}, $C^{n0}_{k(-1)m1}$ — коэффициент Клебша–Гордана; квадратная скобка в верхнем пределе суммы, определяющей коэффициент Λ_{kmn}, означает выделение целой части.

4. Приведенное выражение описывает закон временнóй эволюции формы деформированной в начальный момент времени капли. При $W < 4$, когда основная мода, а значит, и вся капля устойчивы по отношению к собственному заряду, (1) определяет временнóй закон возвращения формы капли к равновесной сферической. На рис. 1 приведены зависимости от времени нелинейной поправки к основной моде при различных значениях параметра Рэлея W, характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду.

При $4 < W < 5$, когда основная мода $(n = 2)$ теряет устойчивость, а все более высокие моды ее сохраняют, картина временнóй эволюции формы капли усложняется (рис. 2). Показатели экспонент, в которые входит квадрат частоты основной моды ω_2^2 при переходе W через $W = 4$, меняют свой знак, и соответствующее слагаемое начинает экспоненциально со временем возрастать, тогда как остальные компоненты выражения (1) продолжают уменьшаться со временем. И по прошествии некоторого интервала времени исходная деформация капли исчезнет, а ее форма определится основной модой, т. е. капля будет эволюционировать к фигуре, близкой к вытянутому сфероиду. Степень удлинения заряженной капли электропроводной жидкости за счет увеличения амплитуды основной моды будет ограничена либо началом полевой эмиссии зарядов при достаточном увеличении напряженности поля собственного заряда на ее вершинах при увеличении кривизны вершин, связанном с вытягиванием капли, как это было описано ранее в [5], либо делением капли на две части сравнимых размеров [5,6].

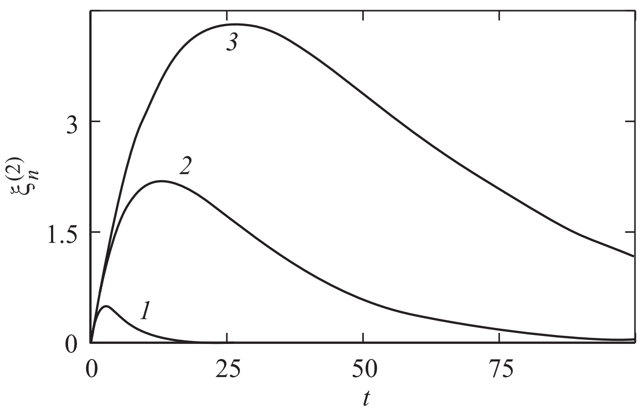

Рис. 1. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_2^{(2)}(t)$ для основной моды от безразмерного времени t, построенные в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = r_0 = 1$, для одномодовой начальной деформации при $k = m = 2$, $h_2 = 1$, $\nu = 1$, $n = 2$ и различных значениях параметра W. Кривая *1* соответствует $W = 3$, *2* — $W = 3.8$, *3* — $W = 3.9$. Критическое для реализации неустойчивости основной моды значение параметра W равно четырем.

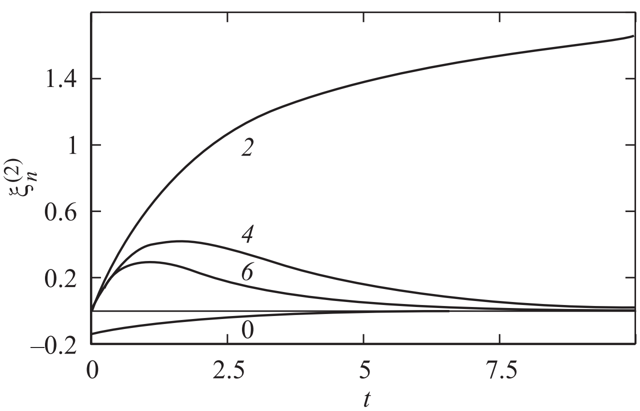

Рис. 2. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_n^{(2)}(t)$ от безразмерного времени t, построенные для одномодовой начальной деформации при $k = m = 3$, $h_3 = 1$, $\nu = 1$ и закритическом для основной моды значении параметра Рэлея $W = 4.1$ и различных n. Номер у кривой совпадает с номером n.

Эффект реализации неустойчивости основной моды будет иметь место независимо от того, входила ли основная мода в спектр мод, определивших начальную деформацию, или нет, поскольку во втором порядке малости основная мода за счет нелинейного взаимодействия возбуждается всегда, при любом виде начальной деформации [3,7,8]. Если же величина параметра W будет лежать в диапазоне $5 < W < 6$, то неустойчивой будет и третья мода $(n = 3)$. Но приведет ли ее неустойчивость к деформации сфероидальной формы, будет зависеть от того, присутствует ли третья мода в спектре мод, определяющих начальную деформацию, или в спектре мод, возбудившихся за счет нелинейного взаимодействия. Если третьей моды нет ни в одном из упомянутых наборов мод, то, согласно (1), она не повлияет на форму капли (если абстрагироваться от осцилляций исчезающе малой амплитуды тепловой природы).

5. Заключение. Нелинейные осцилляции капель вязких жидкостей можно аналитически исследовать классическими асимптотическими методами. Получающиеся аналитические выражения в пределе большой вязкости достаточно компактны. Анализ найденного выражения для временно́й эволюции формы деформированной капли сильно вязкой жидкости позволяет проследить за временно́й эволюцией каждой моды.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК−2946−2004−1 и гранта РФФИ № 03−01−00760.

Список литературы

[1] *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
[2] *Feng Z.C.* // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
[3] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. В. 12. С. 9–19.
[4] *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 1. С. 22–31.
[5] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 10. С. 1–7.
[6] *Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. В. 19. С. 16–23.
[7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. В. 2. С. 27–35.
[8] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. В. 9. С. 23–31.