01

Применение преобразования Дарбу к задаче о распространении линейных волн в узких каналах

© А.И. Гудименко, К.Г. Купцов

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток
E-mail: algud@poi.dvo.ru

В окончательной редакции 3 мая 2005 г.

Обычное N-кратное преобразование Дарбу для одномерного оператора Шредингера обобщается на произвольный оператор Штурма–Лиувилля, причем так, что преобразованию могут быть подвержены все коэффициенты последнего. Полученное преобразование применяется к задаче о распространении линейных баротропных волн в узких каналах для конструирования точно решаемых профилей ширины и глубины канала.

Среди методов генерации точно решаемых линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в последнее время широкую популярность приобрел метод преобразования Дарбу, главным образом, благодаря своей простоте и эффективности в приложениях [1–3].

Классическое преобразование Дарбу имеет дело, однако, не с произвольным линейным дифференциальным оператором второго порядка (т.е. оператором Штурма–Лиувилля), а с его частным случаем — одномерным оператором Шредингера. Соответственно и примеры использования этого преобразования в основном относятся или к квантовой механике для конструирования точно решаемых потенциалов [1,2] или к теории солитонов для нахождения решений уравнения Кортевега–де Фриза, известным образом связанного с оператором Шредингера [3]. Прямые приложения преобразования Дарбу к областям физики, отличным от квантовой механики, по существу, отсутствуют, а если и имеются, например в акустике, то опять же в рамках уравнения Шредингера. Причина этого состоит, в частности, в том, что приходится иметь дело именно с произвольными операторами Штурма–Лиувилля.

В данной работе классическое преобразование Дарбу обобщается на произвольный оператор Штурма–Лиувилля, который для удобства мы будем записывать в виде

$$L := r^{-1}\,\frac{d}{dx}\,r\,p\,\frac{d}{dx} + q, \qquad (1)$$

где коэффициенты r, p и q — функции x. Это обобщение получается как комбинация классического преобразования Дарбу и точно решаемых преобразований Куммера–Лиувилля [4]. При своем действии оно затрагивает все коэффициенты оператора.

Отметим, что имеются работы, обобщающие классическое преобразование Дарбу на более общие операторы Штурма–Лиувилля. Однако в них или преобразованию подвергается лишь коэффициент q, как например в [5], или, как в [4], хотя и рассматривается общий случай, результаты достаточно специфичны и не приспособлены для эффективного использования в приложениях.

Полученное обобщение применяется к задаче о распространении линейных баротропных волн в узких каналах [6] с целью конструирования точно решаемых профилей ширины и глубины канала. Точные решения этой задачи известны лишь для немногих видов профилей ширины и глубины канала, например линейных, квадратичных [6] или экспоненциальных. Преобразованием Дарбу удается смоделировать гораздо более широкий спектр профилей, включающий в себя и относительно неплохие приближения к некоторым наперед заданным.

Перейдем к изложению результатов и начнем с определения N-кратного преобразования Дарбу для оператора (1) при фиксированных r и p. Обозначим $L^{(N)}$ соответствующее N-кратное преобразование Дарбу оператора L и $T^{(N)}$ — оператор данного преобразования, т. е. оператор, удовлетворяющий тождеству $L^{(N)}T^{(N)} = T^{(N)}L$. Имеем

$$L^{(N)} := r^{-1}\,\frac{d}{dx}\,r\,p\,\frac{d}{dx} + q^{(N)}, \quad T^{(N)}u = p^{N/2}\,\frac{\{u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_N},u\}}{\{u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_N}\}}, \qquad (2)$$

где

$$q^{(N)} = q + 2\sqrt{p}\,\frac{d}{dx}\,\sqrt{p}\,\frac{d}{dx}\ln r^{N/2}p^{N^2/4}\{u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_N}\}, \qquad (3)$$

$u_{\lambda_1},\ldots,u_{\lambda_N}$ — собственные функции L, отвечающие собственным значениям $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ (эти функции далее называются функциями преобразования), и фигурные скобки обозначают операцию взятия вронскиана.

Формулы (2), (3) получаются следующим образом: сначала с помощью преобразования Куммера–Лиувилля [4] исходный оператор приводится к оператору Шредингера, затем к последнему применяется классическое преобразование Дарбу и, наконец, действуя на результат обратным (по отношению к использованному) преобразованием Куммера–Лиувилля, находится искомый оператор. Здесь уместно напомнить, что преобразование Куммера–Лиувилля есть комбинация преобразований зависимой и независимой переменных, причем первое есть умножение на функцию, а второе — замена координат [4].

Отметим, что выражения (2) и (3) при $N = 1$ совпадают с полученными в работе [5].

Обобщим теперь только что определенное преобразование, позволяя коэффициенту r меняться, но по-прежнему оставляя p фиксированным. Подействуем на $L^{(N)}$ преобразованием Куммера–Лиувилля T_a, где T_a — оператор умножения на функцию a, положительную, как мы будем далее предполагать. Получим оператор

$$L_1 := r_1^{-1} \frac{d}{dx} r_1 p \frac{d}{dx} + q_1, \tag{4}$$

в котором, как показывают простые вычисления, $r_1 = ra^{-2}$, а неизвестные q_1 и a связаны соотношением

$$r^{-1} \frac{d}{dx} rp \frac{d}{dx} a^{-1} + (q^{(N)} - q_1)\, a^{-1} = 0. \tag{5}$$

Покажем, что уравнение (5) точно решаемо при

$$q_1 := q^{(N)} - q^{(M)} + \lambda_0, \tag{6}$$

где M, вообще говоря, отлично от N и λ_0 — константа. В самом деле, в этом случае (5) есть уравнение на собственные значения для M-кратного преобразования Дарбу (2) оператора (1). Следовательно, a^{-1} есть M-кратное преобразование Дарбу собственной функции u_{λ_0} этого оператора, т. е.

$$a^{-1} = T^{(M)} u_{\lambda_0}. \tag{7}$$

С учетом (7) для оператора так определенного преобразованием имеем

$$T_1 := T_a T^{(N)} = T^{(N)} / T^{(M)} u_{\lambda_0}. \tag{8}$$

Снимем, наконец, ограничение фиксированности коэффициента p. Для этого выполним в (4) замену координат $x \to y = \varphi^{-1}(x)$, определяя φ условием

$$r = \varphi^*\left[r\left(T^{(K)}u_{\lambda_0}\right)^2\right]\frac{d\varphi}{dy}, \tag{9}$$

где φ^* — индуцированное φ действие на функциях: $u(x) \to \to \varphi^* u(y) := u\big(\varphi(y)\big)$, и K — натуральное. Получим оператор

$$L_2 := r_2^{-1}\frac{d}{dy}r_2 p_2\frac{d}{dy} + q_2, \tag{10}$$

в котором с учетом (7) и (9)

$$r_2 = r\varphi^*\left(T^{(M)}u_{\lambda_0}/T^{(K)}u_{\lambda_0}\right)^2, \quad p_2 = r^{-2}\varphi^*\left[r^2 p\left(T^{(K)}u_{\lambda_0}\right)^4\right], \quad q_2 = \varphi^* q_1. \tag{11}$$

Оператор данного преобразования T_2 определяется формулой (8), в которой, конечно, следует перейти к новой переменной:

$$T_2 = \varphi^*\left(T^{(N)}/T^{(M)}u_{\lambda_0}\right). \tag{12}$$

Формулы (10)–(12) решают задачу обобщения классического преобразования Дарбу на произвольный оператор Штурма–Лиувилля (при фиксированном p нужно положить $T^{(K)}u_{\lambda_0} = 1$ и считать φ^* тождественным).

Остановимся кратко на вопросе о разрешимости условия (9). Нетрудно видеть, что это условие эквивалентно следующему интегральному:

$$\int^{y} r\,dy = \int^{x} r\left(T^{(K)}u_{\lambda_0}\right)^2 dx. \tag{13}$$

Если представить преобразование $T^{(K)}$ в виде композиции однократных, то вычисление правой части (13) с помощью K раз интегрирования по частям, может быть сведено к вычислению интеграла от $ru_{\lambda_0}^2$. Отдельный шаг этой процедуры основывается на легко проверяемом тождестве

$$\int_{x_0}^{x} r\left(T^{(1)}u_\lambda\right)^2 dx = r\sqrt{p}\,u_\lambda T^{(1)}u_\lambda\Big|_{x_0}^{x} - (\lambda - \lambda_1)\int_{x_0}^{x} r\,u_\lambda^2\,dx. \tag{14}$$

Во многих случаях, например в обсуждаемых ниже, интегралы от r и $ru^2_{\lambda_0}$ могут быть вычислены аналитически.

Далее рассматривается применение обобщенного преобразования Дарбу к задаче о линейных волнах в узких каналах. Амплитуда этих волн в случае гармонических по времени колебаний удовлетворяет уравнению $Lu_\lambda = \lambda u_\lambda$, причем r и p интерпретируются соответственно как ширина и глубина канала, $q = 0$ и $\lambda = -\omega^2/g$, где ω — частота колебаний и q — ускорение свободного падения. Мы, однако, по-прежнему будем считать величины в L безразмерными и в качестве исходного для преобразования Дарбу примем этот оператор с $r = p = 1$. Новые коэффициенты и оператор преобразования вычисляются по формулам (11), (12), в которых полагается $T^{(M)} = T^{(N)}$.

Мы хотим продемонстрировать достаточно широкие возможности преобразования Дарбу по конструированию точно решаемых профилей ширины и глубины канала и начнем со случая однократного преобразования Дарбу.

Выпишем в явном виде выражения (11), (12), беря в качестве функции преобразования $u_{\lambda_i} = a_i \cos(k_i x + \alpha_i)$, где $i = 0, 1$ и a_i, k_i и α_i — константы. В случае, когда преобразованию подвержена только ширина канала, имеем

$$r_2 = a_0^2\big[-k_0 \sin(k_0 x + \alpha_0) + k_1 \cos(k_0 x + \alpha_0)\,\mathrm{tg}(k_1 x + \alpha_1)\big]^2, \quad p_2 = 1, \tag{15}$$

$$T_2 u_\lambda = \frac{du_\lambda/dx + k_1\,\mathrm{tg}(k_1 x + \alpha_1)u_\lambda}{-k_0 \sin(k_0 x + \alpha_0) + k_1 \cos(k_0 x + \alpha_0)\,\mathrm{tg}(k_1 x + \alpha_1)}. \tag{16}$$

Наоборот, в случае, когда преобразованию подвержена только глубина, в терминах переменной x:

$$r_2 = 1, \quad p_2 = a_0^4\big(-k_0 \sin(k_0 x + \alpha_0) + k_1 \cos(k_0 x + \alpha_0)\,\mathrm{tg}(k_1 x + \alpha_1)\big)^4, \tag{17}$$

а выражение для T_2 такое же, как в (16). Связь с переменной y находится из (13), (14) и есть

$$y = a_0^2\Big\{\cos(k_0 x + \alpha_0)\big[-k_0 \sin(k_0 x + \alpha_0) + k_1 \cos(k_0 x + \alpha_0)\,\mathrm{tg}(k_1 x + \alpha_1)\big] + \frac{1}{2}(k_0^2 - k_1^2)\big[k_0^{-1} \cos(k_0 x + \alpha_0) \sin(k_0 x + \alpha_0) + x\big]\Big\} + \mathrm{const}. \tag{18}$$

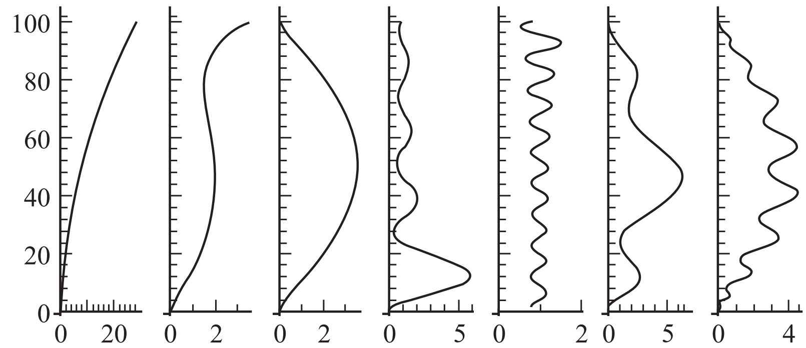

Рис. 1. Профили глубины, полученные 1-кратным (первые три графика), 2-кратным (четвертый и пятый графики) и 3-кратным преобразованиями Дарбу при постоянной ширине.

В обоих случаях непосредственной проверкой можно убедиться, что $T_2 u_\lambda$ действительно является собственной функцией L_2 с собственным значением $\lambda - \lambda_0$.

Варьируя параметры $k_0, k_1, \alpha_0, \alpha_1$, получаем семейство профилей ширины и глубины. На рис. 1 из этого семейства приведены только три профиля глубины, однако вид их типичен (в частности, по числу экстремумов) для всего семейства. Желаемая область изменения y получается подбором в (18) параметра a_0 и константы интегрирования. Мы принимаем эту область, т.е. длину канала, равной 100, и откладываем ее на графиках по вертикали, в то время как по горизонтали откладываем глубину (ширину) канала.

С ростом кратности преобразования диапазон профилей ширины и глубины заметно расширяется, что иллюстрируют графики с четвертого по седьмой на рис. 1 и с первого по третий на рис. 2. Заметим, что в широком диапазоне изменения параметров преобразования профиль ширины, полученный при фиксированной глубине, и соответствующий ему профиль глубины, полученный при фиксированной ширине (имеется в виду соответствие типа (15) $\rightarrow$ (17)), по виду совпадают. Начиная с трехкратного преобразования появляется возможность моделирования „тонкой“ структуры профиля, т.е. наложения на уже сконструирован-

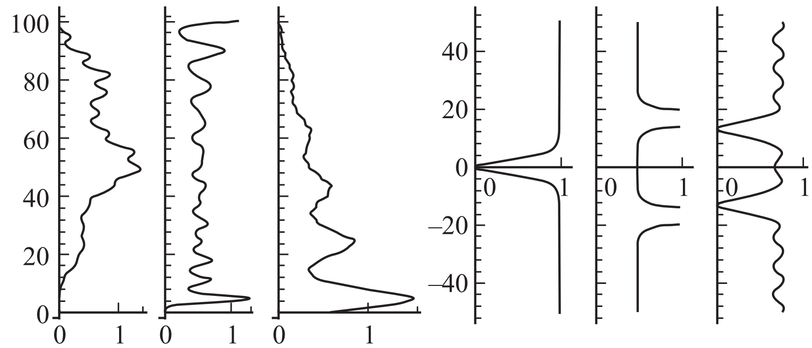

Рис. 2. Профили ширины, полученные 4-кратным (первые три графика), 1-кратным (четвертый график) и 2-кратным преобразованиями Дарбу при постоянной глубине.

ный профиль более высокочастотного возмущения. Это возмущение получается применением подходящего преобразования Дарбу четной кратности и, как таковому, ему самому соответствует определенный профиль. Например, на рис. 1 последние два профиля получены из третьего „наложением“ соответственно четвертого и пятого профилей. О возможностях четырехкратного преобразования можно судить по первым трем графикам рис. 2.

В качестве функций преобразования могут выступать и действительные экспоненты. Такой выбор приводит к профилям типа изображенных на рис. 2 на графиках с четвертого по шестой.

Не имея здесь возможности сколько-нибудь подробно остановиться на случае, когда преобразованию подвержены одновременно и ширина и глубина канала, отметим лишь, что в широком диапазоне изменения параметров преобразования профили ширины, при уже сконструированном профиле глубины, варьируются по виду примерно в тех же пределах, что и при постоянной глубине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы № 17 Президиума РАН.

Список литературы

[1] *Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.* // ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 356–367.
[2] *Багров В.Г., Самсонов Б.Ф.* // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 951–1012.
[3] *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1990. 120 p.
[4] *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2002. 464 с.
[5] *Suzko A.A.* // IJMPA. 1997. V. 12. N 1. P. 277–282.
[6] *Ламб Г.* Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.