01;05

Упругий поперечный удар по круглой ортотропной пластинке

© А.А. Локтев

Воронежский государственный архитектурно-строительный университет
E-mail: prtlokt@yandex.ru

Поступило в Редакцию 23 марта 2005 г.

Моделируется процесс ударного взаимодействия твердого тела и упругой ортотропной пластинки, обладающей цилиндрической анизотропией, посредством упругого буфера. Динамическое поведение пластинки описывается волновыми уравнениями типа Уфлянда–Миндлина, учитывающими инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига. В качестве метода решения применяются лучевой метод и метод сращивания асимптотических разложений, полученных для малых времен в зоне контакта и вне ее. Исследуется влияние анизотропии материала пластинки на динамическую контактную силу и прогиб, возникающие в месте ударного взаимодействия.

1. Введение. Используется волновая теория удара, создание которой стало возможным благодаря появлению волновых уравнений типа Уфлянда–Миндлина, описывающих динамическое поведение пластинки с учетом инерции вращения поперечных сечений и деформаций поперечного сдвига [1,2], а также подход, основанный на зарождении в момент удара в пластинке нестационарной волны поперечного сдвига [3], которая затем распространяется с конечной скоростью вдоль пластинки. С помощью этого подхода в работе [4] выполнен динамический расчет упругой изотропной пластинки Уфлянда–Миндлина, испытывающей поперечное воздействие твердого тела посредством нелинейно-упругого буфера, используя лучевой метод. В представляемой работе процедура, предложенная в [4], обобщена к случаю ударного взаимодействия твердого тела с линейно упругим буфером и упругой ортотропной пластинкой.

2. Постановка задачи и определяющие соотношения. Твердое тело массой m подлетает к свободному концу пружины со скоростью V_0, другой конец которой жестко заделан в пластинке. При этом предполагается, что тело движется вдоль оси пружины, которая

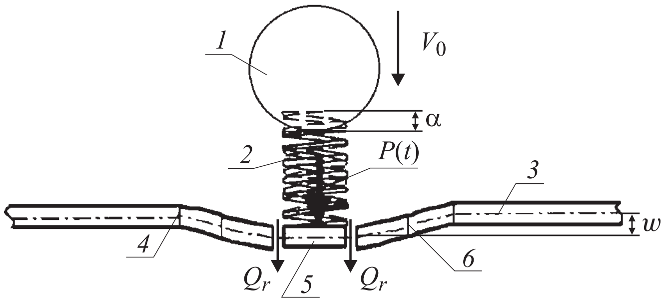

Рис. 1. Схема ударного взаимодействия твердого тела и буфера, установленного на пластинке: *1* — ударник, *2* — буфер, *3* — плита, *4* — фронт квазипродольной волны, *5* — контактная область, *6* — фронт квазипоперечной волны.

перпендикулярна пластинке (рис. 1). Поведение пружины, которая не теряет устойчивости при деформации, подчиняется закону Гука.

Динамическое поведение круглой упругой ортотропной пластинки Уфлянда–Миндлина, обладающей цилиндрической анизотропией, в полярной системе координат описывается уравнениями, которые были получены из уравнений, приведенных в [5], путем учета инерции вращения поперечных сечений и деформации поперечного сдвига. Для рассматриваемой осесимметричной задачи, волновые характеристики не зависят от угла φ и определяющие уравнения принимают вид:

$$D_r\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-D_\theta\,\frac{\varphi}{r^2}+hKG_{rz}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\varphi\right)=-\rho\,\frac{h^3}{12}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

$$KG_{rz}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+KG_{rz}\,\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}-\varphi\right)=\rho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

где $D_r = B_r h^3/12$, $D_\theta = B_\theta h^3/12$, $B_r = E_r/(1-\sigma_r\sigma_\theta)$, $B_\theta = E_\theta/(1-\sigma_r\sigma_\theta)$, $E_r\sigma_r = E_\theta\sigma_\theta$, $K = 5/6$, D_r, D_θ — жесткости изгиба для направлений r, θ; E_r, E_θ и σ_r, σ_θ — модуль упругости и коэффициент Пуассона для направлений r, θ; G_{rz} — модуль сдвига в плоскости rz; $w(r,\theta)$ — нормальное перемещение срединной плоскости; $\varphi(r,\theta)$ — произвольная искомая функция координат r, θ; ρ — плотность; h — толщина пластинки, t — время.

3. Метод решения. Предположим, что в результате поперечного удара по пластинке в ней зарождаются продольные и сдвиговые волны (рис. 1), фронты которых являются поверхностями сильного разрыва и расширяются с нормальными скоростями $G^{(\alpha)}$ (индекс α принимает значение 1 и 2 и означает номер волны).

Некоторая искомая функция $Z(x_\alpha, t)$ за фронтом волновой поверхности Σ представляется в виде лучевого ряда

$$Z(r,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[Z,_{(k)}\right]_{t=r/G} \left(t - \frac{r-r_0}{G}\right)^k H\left(t - \frac{r-r_0}{G}\right), \qquad (3)$$

где $\left[Z,_{(k)}\right] = Z^+,_{(k)} - Z^-,_{(k)} = \left[\partial^k Z/\partial t^k\right]$; $Z,_{(k)}$ — скачки производных k-го порядка по времени t от искомой функции Z на волновой поверхности Σ, т.е. при $t = (r - r_0)/G^{(\alpha)}$, r_0 — начальный радиус, верхние индексы „+“ и „−“ означают, что величина вычисляется непосредственно перед и за волновым фронтом соответственно, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда, r — длина дуги, отсчитываемая вдоль луча.

Для определения коэффициентов лучевого ряда (3) необходимо продифференцировать определяющие уравнения (1), (2) для пластинки k раз по времени, взять их разность на различных сторонах волновой поверхности Σ и применить условие совместности для скачков $k+1$-го порядка от функции Z по времени t [3]

$$G\left[\frac{\partial Z,_{(k)}}{\partial r}\right] = -\left[Z,_{(k+1)}\right] + \frac{\delta\left[Z,_{(k)}\right]}{\delta t}, \qquad (4)$$

где $\delta/\delta t$ — δ-производная по времени.

В результате из уравнений движения (1), (2) для определения скачков искомых величин с точностью до произвольных констант получаем систему рекуррентных дифференциальных уравнений:

$$\left(1 - \frac{\rho G^2}{B_r}\right)\omega_{\varphi(k+1)} = 2\,\frac{\delta\omega_{\varphi(k)}}{\delta t} + Gr^{-1}\omega_{\varphi(k)} + b_r G X_{w(k)} + F_{\varphi(k-1)}, \qquad (5)$$

$$\left(1 - \frac{\rho G^2}{KG_{rz}}\right)X_{w(k+1)} = 2\,\frac{\delta X_{w(k)}}{\delta t} + Gr^{-1}X_{w(k)} - G\omega_{\varphi(k)} + F_{w(k-1)}, \qquad (6)$$

где $X_{w(k)} = [w, _{(k+1)}]$, $w_{\varphi(k)} = [\varphi, _{(k+1)}]$, $b_r = hKG_{rz}D_r^{-1}$, $r = r_0 + Gt$,

$$F_{\varphi(k-1)} = -\frac{\delta^2\omega_{\varphi(k-1)}}{\delta t^2} - Gr^{-1}\,\frac{\delta\omega_{\varphi(k-1)}}{\delta t} + G^2 r^{-2}\,\frac{E_\theta}{E_r}\,\omega_{\varphi(k-1)} - b_r G\,\frac{\delta X_{w(k-1)}}{\delta t} + b_r G^2\omega_{\varphi(k-1)},$$

$$F_{w(k-1)} = -\frac{\delta^2 X_{w(k-1)}}{\delta t^2} - Gr^{-1}\,\frac{\delta X_{w(k-1)}}{\delta t} + G\,\frac{\delta\omega_{\varphi(k-1)}}{\delta t} + G^2 r^{-1}\omega_{\varphi(k-1)}.$$

Полагая в (5) и (6) $k = -1, 0, 1, 2, 3$, получим скачки соответствующего порядка на первой и второй волнах, позволяющие записать искомые функции W и Q_r в виде отрезков лучевых рядов с точностью до постоянных интегрирования:

$$W \cong \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k!}\,X_{w(k)}^{(\alpha)}(y_\alpha)^k H(y_\alpha), \tag{7}$$

$$Q_r \cong KG_{rz}h \times \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{k!}\left(-X_{(k)}^{(\alpha)}G^{(\alpha)-1} + \frac{\delta X_{(k-1)}^{(\alpha)}}{\delta t}\,G^{(\alpha)-1} - \omega_{(k-1)}^{(\alpha)}\right)(y_\alpha)^k H(y_\alpha), \tag{8}$$

где $y_\alpha = t - (r - r_0)G^{(\alpha)-1}$, величины $X_{w(k)}^{(\alpha)}$, $\omega_{\varphi(k)}^{(\alpha)}$ и их δ-производные подсчитываются при $y_\alpha = 0$.

4. Система уравнений, описывающих взаимодействие. Процесс взаимодействия твердого тела с буфером и пластинкой описывается следующими уравнениями:

$$m\ddot{y} = -P(t), \qquad \rho h\pi r_0^2\ddot{w} = 2\pi r_0 Q_r + P(t). \tag{9}$$

Здесь $y = \alpha + w$ — полное перемещение ударника (рис. 1), $P(t) = E_1(\alpha - w)$ — контактная сила, где E_1 — коэффициент жесткости пружины.

Подставляя величины y и $P(t)$ в уравнения (9) и учитывая условие горизонтальности касательной к срединной поверхности плиты в граничных точках области контакта [3,4], приходим к системе уравнений,

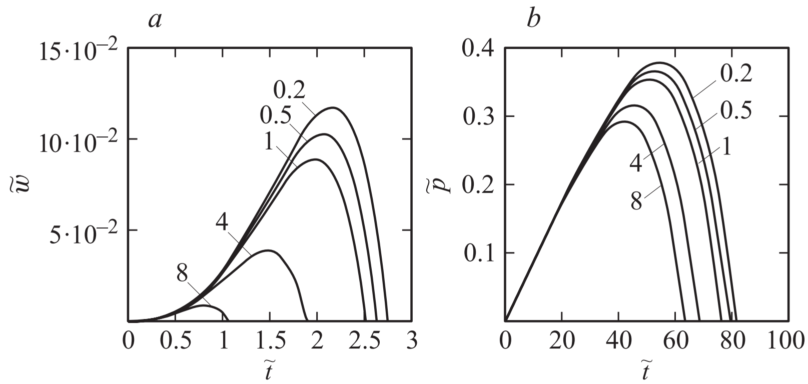

Рис. 2. Зависимости от времени для различных значений соотношения E_θ/E_r: *a* — динамического прогиба, *b* — контактной силы.

которая определяет процесс взаимодействия ударника, буфера и плиты. Для ее решения представим функции, входящие в нее, в виде степенных рядов по времени t. Подставляя соотношения (7) и (8), записанные на границах области контакта, т. е. при $r = r_0$, и степенной ряд по времени t для α в систему уравнений (9) и приравнивая коэффициенты в системе трех алгебраических уравнений для определения трех неизвестных констант ($j = 0, 1, 2$) и α_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$). После определения постоянных интегрирования можно записать динамический прогиб и контактную силу в виде отрезков степенных рядов с известными коэффициентами при t.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрен численный пример и исследована зависимость динамического прогиба и контактной силы от ортотропных свойств пластинки. На рис. 2 приведены зависимости динамического прогиба (рис. 2, *a*) и контактной силы (рис. 2, *b*) от времени для различных значений соотношения E_θ/E_r, которые указаны цифрами у кривых. На рис. 2 видно, что при уменьшении соотношения E_θ/E_r происходит увеличение прогиба и контактной силы до некоторого значения при $E_\theta/E_r \ll 1$, при увеличении этого соотношения происходит уменьшение прогиба и силы. Таким образом, видно, что анизотропия в плоскости пластинки значительно влияет на динамические характеристики контактного взаимодействия.

Список литературы

[1] *Уфлянд Я.С.* // Прикладная механика. 1948. Т. 12. С. 287–300.
[2] *Mindlin R.D.* // Quart. Appl. Math. 1961. V. 19. P. 51–61.
[3] *Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V.* // Acta Mechanica. 1994. V. 102. N 1–4. P. 103–121.
[4] *Россихин Ю.А., Шитикова М.В., Локтев А.А.* // Изв. вузов. Строительство. 2004. № 11. С. 16–22.
[5] *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.