01;04

О числе столкновений в ансамбле одинаковых заряженных частиц в закрытой магнитной ловушке

© В.А. Гордиенко, А.Е. Дубинов

Саровский государственный физико-технический институт

Поступило в Редакцию 22 апреля 2005 г.

Получено строгое доказательство теоремы о бесконечном числе столкновений в ансамбле одинаковых заряженных частиц в закрытой магнитной ловушке.

Уже несколько десятилетий известна задача Я.Г. Синая о числе столкновений в конечном ансамбле частиц идеального газа на бесконечной прямой, на бесконечной плоскости или в бесконечном пространстве. Можно показать, что эта задача сводится к бильярдной задаче с одной частицей в фазовом пространстве большой размерности и сложной геометрии, а число столкновений — конечно. Введение в технику решения подобных задач и современное состояние проблемы изложено в [1–3]. Решение подобных задач имеет важное значение при анализе эргодических свойств идеального газа в статистической механике.

Интуитивно ясно, что в указанных условиях число столкновений частиц будет конечно, так как частицы постепенно, одна за другой, уходят на бесконечность, теряя возможность столкновений. И если бы существовали причины или механизмы, препятствующие уходу частиц и возвращающие частицы в область их взаимодействия, то вопрос о количестве столкновений мог бы иметь иной ответ. Например, границы областей или магнитное поле для заряженных частиц действительно являются такими факторами.

В настоящей работе рассмотрен один из таких примеров — конечный ансамбль одинаковых заряженных частиц в закрытой магнитной ловушке и дано строгое доказательство бесконечности числа их столкновений.

Конструкция ловушки Ξ следующая (рис. 1): на бесконечную плоскую полосу шириной L, ограниченную стенками, которые упруго

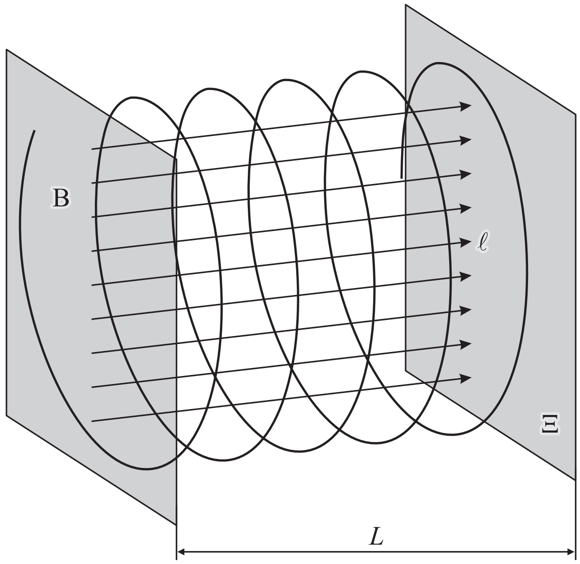

Рис. 1. Схема закрытой магнитной ловушки и траектории заряженной частицы в ней.

отражают частицы, наложено перпендикулярное стенкам однородное и стационарное магнитное поле B. Сначала напомним, как будет вести себя в такой ловушке одиночная заряженная частица. Форма ее траектории — цилиндрическая винтовая линия с постоянным шагом. Радиус цилиндра и период вращения частицы вокруг цилиндра равны соответственно

$$R_c = \frac{mv^{\perp}}{qB}; \quad T_c = \frac{2\pi m}{qB}. \tag{1}$$

Примечательно, что период обращения не зависит от поперечной скорости частицы $v^{\perp}$, поэтому одинаковые по величине отношения заряда q к массе m частицы вращаются синхронно (условие циклотронного резонанса).

При достижении стенки частица упруго отражается от нее, сохраняя при этом поперечную скорость $v^{\perp}$ и изменяя продольную скорость $v^{\parallel}$ на противоположную. Таким образом, частица также совершает пролетные колебания между стенками с периодом $T_b = 2L/v^{\parallel}$ (баунс-колебания).

Перейдем теперь непосредственно к задаче о количестве столкновений в ансамбле одинаковых частиц в закрытой магнитной ловушке Ξ. Будем считать, что частиц не так уж много, чтобы учитывать поле пространственного заряда частиц, или считать, что их заряд скомпенсирован нейтрализующим безынерционным фоном частиц противоположного знака заряда. Тогда оказывается справедливой следующая теорема:

Теорема. Если в ансамбле, состоящем из не менее двух одинаковых заряженных частиц ненулевого диаметра и находящемся в закрытой магнитной ловушке типа Ξ, произошло хотя бы одно столкновение между частицами, то столкновений будет бесконечно много.

Замечание 1. Согласно принципу математической индукции, достаточно доказать, что если произошло одно столкновение, то за ним обязательно произойдет еще одно.

Доказательство. Допустим, в некоторой точке с продольной координатой x_0 в ловушке Ξ произошло столкновение между парой одинаковых точечных частиц (скажем, между 1-й и 2-й). Пусть это столкновение произошло на магнитной силовой линии l в точке x_0. Далее выделенные частицы двигаются каждая по своей траектории, и в отсутствие столкновений с другими частицами они должны вернуться по винтовым линиям на силовую линию l строго одновременно. Однако тогда их мгновенное положение на силовой линии l будет смещено относительно точки x_0 и будет различным вследствие произвольности их продольных скоростей $v_1^{\parallel}$ и $v_2^{\parallel}$. А вследствие произвольности их поперечных скоростей $v_1^{\perp}$ и $v_2^{\perp}$ частицы могут столкнуться во второй раз только на силовой линии l. (Столкновения выделенных частиц вне силовой линии l, а также столкновения любой из них с 3-й возможны лишь в некоторых специально подобранных случаях, но эти случаи только усиливают доказательство теоремы).

Таким образом, для нахождения следующего столкновения в выделенной паре частиц необходимо рассмотрение расстояния между ними в момент прохождения их через силовую линию l. Покажем, что найдется номер N их очередного одновременного прохождения через силовую линию l такой, что это расстояние будет меньше любого, наперед заданного промежутка δl.

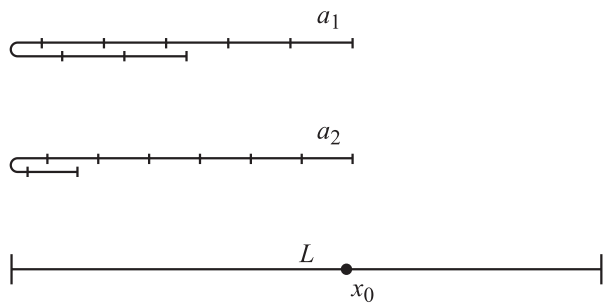

Рис. 2. Наложение двух групп отрезков длиной a_1 и a_2 на основной отрезок длины L с отражением от его концов.

Математически задача ставится так: пусть на основной отрезок длины L начиная с точки x_0 накладываются последовательно встык отрезки первой группы длиной $a_1 = v_1^{\|} T_c$ и с этой же точки x_0 одновременно с каждым отрезком первой группы — отрезки второй группы длиной $a_2 = v_2^{\|} T_c$ (рис. 2). При переходе какого-либо очередного накладываемого отрезка через край основного отрезка накладываемый загибается на этом крае в обратную сторону. Требуется доказать, что найдется такой номер N для каждой группы отрезков, что расстояние между концами накладываемых отрезков с этими номерами будет меньше любого, наперед заданного расстояния dl.

Замечание 2. Мы не накладываем никаких ограничений на величины a_1 и a_2, т. е. они могут быть как больше, так и меньше L.

Замечание 3. Отрезки a_1 и a_2 могут накладываться как в одну, так и в противоположные стороны от x_0.

Процесс наложения двух групп отрезков длиной a_1 и a_2 на основной отрезок длины L с отражением от его концов эквивалентен наложению дуг длиной a_1 и a_2 на окружность периметра $2L$ (рис. 3).

Для решения задачи мы модифицировали метод, который использован при доказательстве теоремы Якоби в [2] на с. 32. Пусть для определенности $a_1 > a_2$ и дуги накладываются в одном направлении, начиная с точки x_0, например, по часовой стрелке. Рано или поздно 1-я частица обгонит 2-ю, совершив на целое число оборотов по окружности $2L$ больше, чем вторая. Допустим, число дуговых шагов, которые

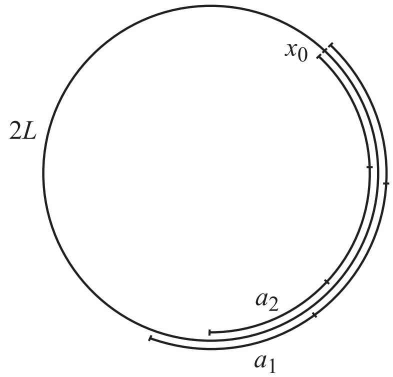

Рис. 3. Наложение двух групп дуговых отрезков длиной a_1 и a_2 на окружность периметром $2L$.

прошли частицы при обгоне, равно n. Пусть для определенности сразу же после обгона дуговое расстояние между частицами $b < a_1/2$ (случай противоположного неравенства рассматривается аналогично, но уже для межчастичного расстояния непосредственно перед обгоном). Тогда 1-я частица еще через n шагов обгонит на $2b$, а еще через n — на $3b$ и т. д. Легко понять, что расстояние между частицами растет с дуговым шагом b, который соответствует n шагам частиц. Фактически у нас уменьшился дуговой шаг с a_1 до $b < a_1/2$.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока, двигаясь с дуговыми шагами b, мы не превысим $2L$. Тогда сразу же после этого момента расстояние между частицами станет равным c. Пусть также для определенности сразу же к этому моменту частицы сделали $m = kn$ шагов и после этого момента дуговое расстояние между частицами $c < b/2$ (случай противоположного неравенства рассматривается аналогично). Фактически у нас еще раз уменьшился дуговой шаг до $c < b/2 < a_1/4$.

Продолжая подобное рассмотрение, мы снова пройдем расстояние $2L$ с еще более мелким дуговым шагом и снова уменьшим шаг и т. д. Повторяя этот процесс далее и далее, мы сможем приблизиться на сколь угодно малое дуговое расстояние между частицами, а при конечности радиусов частиц это означает повторное столкновение. Теорема доказана.

Для случая, когда шаги откладываются в разные стороны от x_0, доказывается аналогично при рассмотрении точек встречи частиц вместо точек их обгона.

Таким образом, однородное магнитное поле, пусть даже очень малой величины, может существенно изменить ответ в задаче о числе столкновений в ансамбле частиц.

Список литературы

[1] *Гальперин Г.А.* // Труды ММО. 1981. Т. 43. С. 142.
[2] *Гальперин Г.А., Земляков А.Н.* Математические бильярды. М.: Наука, 1990.
[3] *Гальперин Г.А.* // Математическое просвещение. Сер. 3. 2001. № 5. С. 65.