

09

О соотношении фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов

© А.А. Короновский, М.К. Куровская, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@cas.ssu.runnet.ru, aeh@cas.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 19 апреля 2005 г.

Рассматривается взаимосвязь фазовой синхронизации связанных хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов. Показано, что граница возникновения синхронизации временных масштабов зависит от разрешающей способности материнского вейвлета. Синхронизация временных масштабов возникает, как правило, раньше фазовой синхронизации, либо, если разрешающая способность материнского вейвлета оказывается недостаточной, совпадает с моментом возникновения фазовой синхронизации. Результаты проиллюстрированы на примере однонаправленно связанных систем Ресслера.

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [1], имеющих важное и прикладное значение. С развитием теории динамического хаоса было выявлено достаточно большое число различных типов хаотического синхронного поведения связанных динамических систем с потоковым временем: фазовая синхронизация [1], обобщенная синхронизация [2], синхронизация с запаздыванием (лаг-синхронизация) [3], полная синхронизация [4]. Каждый из этих типов синхронной хаотической динамики имеет свои особенности и свои способы диагностики, при этом в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи этих типов синхронного поведения друг с другом. Различные типы синхронизации связанных хаотических осцилляторов могут рассматриваться как различные виды проявления единых закономерностей, возникающих в связанных нелинейных системах (см., например, [5–7]).

В [8–10] было показано, что все вышеупомянутые типы синхронного хаотического поведения могут рассматриваться как частные случаи синхронизации временных масштабов. В частности, было отмечено, что если два связанных хаотических осциллятора находятся в режиме

фазовой синхронизации, то режим синхронизации временных масштабов будет также обнаружен. Обратное неверно, и достаточно типичной является ситуация, когда два связанных осциллятора демонстрируют режим синхронизации временных масштабов, в то время как фазовая синхронизация не наблюдается (см. также [8,9,11]).

Целью настоящей работы является рассмотрение вопроса о взаимосвязи режимов фазовой синхронизации хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов, в частности о том, как соотносятся границы возникновения этих режимов на плоскости управляющих параметров „частота ведущего осциллятора — параметр связи“.

Для описания и анализа фазовой синхронизации, как правило, вводится фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала [1,12–16]. Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными друг с другом и выглядят хаотическими. Захват фаз влечет за собой совпадение частот сигналов. Характерная частота хаотического сигнала определяется как средняя скорость изменения фазы $\langle \dot{\phi}(t) \rangle$.

Существует несколько способов введения фазы, подходящих для систем с простой топологией хаотического аттрактора (с фазово-когерентным аттрактором). Прежде всего, фаза ϕ хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [3,17], но при этом все траектории проекции хаотического аттрактора на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат. Иногда возможно использовать преобразование координат, чтобы получить подходящую для введения фазы проекцию [1,17], или рассматривать динамику системы на плоскости скоростей (\dot{x}, \dot{y}) [18]. Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [12,14], вводимого в рассмотрение с помощью преобразования Гильберта. Наконец, для определения фазы хаотического сигнала может быть использована поверхность сечения Пуанкаре [12,14]. Все вышеописанные подходы дают сходные корректные результаты для систем с фазово-когерентным хаотическим аттрактором [17]. В то же самое время эти методы часто приводят к некорректным результатам для систем с плохо определенной фазой (см., например, [1,19]). Вследствие этого фазовая синхронизация подобных систем в ряде случаев, как правило, может быть выявлена с помощью косвенных наблюдений [17,20] и измерений [21], а иногда установить наличие или отсутствие фазовой синхронизации не представляется возможным.

Для описания режима синхронизации временных масштабов [8–11] в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с материнской вейвлетной функцией в виде вейвлета Morlet (см., например, [22])

$$\psi_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right), \quad (1)$$

вводятся временные масштабы s . Каждый временной масштаб характеризуется мгновенной фазой $\phi_s(t) = \arg W(s, t)$, где $W(s, t)$ — комплексная вейвлетная поверхность. В этом случае явление синхронизации временных масштабов связанных хаотических систем проявляется как синхронное поведение фаз $\phi_{s,1,2}(t)$ первого и второго осцилляторов, соответственно, наблюдаемое в диапазоне синхронизованных временных масштабов $s_m < s < s_b$. Для каждого временного масштаба s из этого диапазона выполняется условие захвата фаз

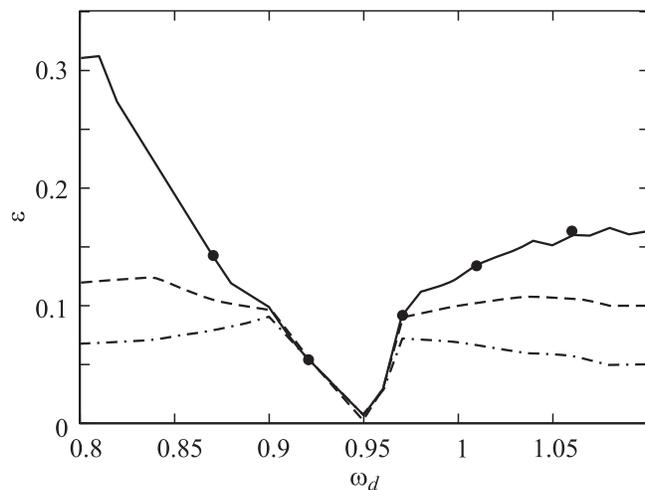
$$|\phi_{s,1}(t) - \phi_{s,2}(t)| < \text{const}, \quad (2)$$

причем на этот диапазон временных масштабов должна приходиться ненулевая доля энергии вейвлетного спектра. Поскольку материнский вейвлет (1) зависит от параметра Ω , то актуальным является также вопрос о его влиянии на обнаружение границы режима синхронизации временных масштабов.

Рассмотрение вопроса о взаимосвязи фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов проведем на примере односторонне связанных хаотических осцилляторов Ресслера со слегка различающимися параметрами

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c). \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) параметр ε характеризует величину связи между осцилляторами. Значения управляющих параметров были выбраны по аналогии с работой [23]: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 0.95$, характеризующий основную частоту колебаний, был фиксирован, а аналогичный параметр ведущей системы ω_d варьировался в диапазоне от 0.8 до 1.1 для того, чтобы задать слабую расстройку взаимодействующих осцилляторов. При



Плоскость параметров (ω_d, ε) для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (3). Сплошной линией показана граница возникновения режима фазовой синхронизации. Граница возникновения режима синхронизации временных масштабов для значения параметра Морлет-вейвлета $\Omega = 2\pi$ показана пунктирной линией, для $\Omega = 16$ — штрихпунктирной. Точками (●) показана граница возникновения режима синхронизации временных масштабов при анализе с параметром Морлет-вейвлета $\Omega = 0.05$.

выбранном значении управляющих параметров хаотические аттракторы взаимодействующих осцилляторов являются фазово-когерентными (за исключением малых областей на плоскости (ω_d, ε) , не оказывающих серьезное влияние на полученные результаты), что позволяет корректно ввести в рассмотрение фазу хаотического сигнала и диагностировать режим фазовой синхронизации.

На рисунке приведена граница возникновения режима фазовой синхронизации на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) . Установление режима фазовой синхронизации диагностировалось по захвату фаз ведущего и ведомого осцилляторов (3), вводимых в рассмотрение как угол в полярной системе координат на плоскостях (x_d, y_d) и (x_r, y_r) соответственно. Следует отметить, что граница возникновения режима фазовой синхронизации в том случае, если фаза хаотического сигнала вводилась с помощью преобразования Гильберта или как угол в

полярной системе координат на плоскости (\dot{x}, \dot{y}) , практически совпадает с приведенной на рисунке, что объясняется хорошей топологией хаотического аттрактора. Видно, что область фазовой синхронизации имеет форму языка, „втыкающегося“ в точку $(\omega_r, 0)$ на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) и расширяющегося с ростом параметра связи ε .

На этом же рисунке показана граница возникновения режима синхронизации временных масштабов для случая, когда параметр материнского вейвлета Morlet выбран $\Omega = 2\pi$. Подобное значение параметра было предложено в [8,9,11]. Выбор данного значения обуславливается тем, что в этом случае существует простая и естественная связь между временным масштабом s и частотой f фурье-спектра: $s = 1/f$. При других значениях параметра Ω связь между частотой и временным масштабом оказывается более сложной (см. подробнее [22]).

Из рисунка отчетливо видно, что при относительно больших расстройках параметров взаимодействующих хаотических осцилляторов режим синхронизации временных масштабов диагностируется при меньших значениях параметра связи ε , нежели режим фазовой синхронизации. В то же самое время при малых расстройках границы возникновения обоих типов хаотической синхронизации совпадают друг с другом. Это объясняется разрешающей способностью вейвлетной функции с выбранным значением параметра Ω : пока расстройка между частотами ведущей и ведомой систем мала, синхронное поведение систем на временном масштабе s_1 , соответствующем основной частоте в фурье-спектре ведущей системы, может быть „замаскировано“ несинхронной динамикой на временном масштабе s_2 , соответствующем основной частоте ведомой системы [22]. Поэтому и на временном масштабе s_2 , и на временном масштабе s_1 будет наблюдаться несинхронное поведение до тех пор, пока несинхронная динамика временного масштаба s_2 не будет полностью подавлена синхронной динамикой масштаба s_1 , что соответствует установлению режима фазовой синхронизации.

По мере увеличения расстройки между ведущим и ведомым осцилляторами интервал между временными масштабами s_1 и s_2 также увеличивается, что позволяет разделить динамику на этих масштабах с помощью вейвлетной функции. Поэтому по мере увеличения расстройки $\omega_d - \omega_r$ порог возникновения синхронизации временных масштабов начинает диагностироваться раньше, чем порог возникновения фазовой синхронизации.

С увеличением параметра Ω разрешающая способность Morlet-вейвлета увеличивается (см., например, [22]), и соответственно удает-

ся диагностировать более тонкие особенности синхронной динамики. Следовательно, порог возникновения режима синхронизации временных масштабов должен сместиться в сторону меньших значений параметра связи ε с ростом Ω , и наоборот, по мере уменьшения параметра Ω , порог возникновения режима синхронизации временных масштабов сдвигается в направлении больших значений ε . Одновременно с уменьшением параметра Ω происходит расширение области на плоскости управляющих параметров (ω_d, ε) , в которой границы фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов совпадают друг с другом.

Сказанное иллюстрируется рисунком, на котором также показана граница возникновения режима синхронизации временных масштабов, полученная с помощью Morlet-вейвлета с параметром $\Omega = 16$. Видно, что синхронизация временных масштабов в данном случае начинает диагностироваться раньше, чем для $\Omega = 2\pi$. На этом же рисунке показана точками граница возникновения синхронизации временных масштабов, найденная для вейвлета с очень плохой разрешающей способностью (маленькое значение параметра $\Omega = 0.5$). Видно, что в этом случае даже для относительно большой расстройки взаимодействующих хаотических осцилляторов граница установления режима синхронизации временных масштабов диагностируется практически одновременно с установлением режима фазовой синхронизации. Таким образом, анализируя поведение связанных хаотических осцилляторов с помощью Morlet-вейвлета с плохой разрешающей способностью (малые значения параметра Ω), можно диагностировать, фактически, границу возникновения режима фазовой синхронизации даже для относительно больших расстроек связанных осцилляторов. При этом фазовая когерентность (или, наоборот, некогерентность) хаотического аттрактора, по всей видимости, не имеет решающего значения. В частности, для системы двунаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера, описанной в [21], для значения параметра связи $\varepsilon = 0.05$ удается диагностировать синхронный режим с помощью Morlet-вейвлета с параметром $\Omega = 0.5$, несмотря на то что хаотический аттрактор не является фазово-когерентным (в работе [21] наличие синхронного режима было установлено с помощью перехода к скоростям (\dot{x}, \dot{y})).

Таким образом, в работе изучена взаимосвязь фазовой синхронизации связанных хаотических осцилляторов и синхронизации временных масштабов, показано их соответствие друг другу, выяснено влияние выбора параметра Morlet-вейвлета на диагностирование синхронного режима.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ по программе „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект 333), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05–02–16273), Научной программы „Университеты России“ (проект УР.01.01.371), а также Научно-образовательного центра „Нелинейная динамика и биофизика“ при Саратовском госуниверситете им. Н.Г. Чернышевского (грант REC-006 of U.S. Civilian Research and Development Foundation for the Independent States of the Former Soviet Union (CRDF)).

Авторы благодарят также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ „Династия“ и Международный центр фундаментальной физики (Москва).

Список литературы

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press. 2001.
- [2] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51 (2). P. 980–994.
- [3] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78 (22). P. 4193–4196.
- [4] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // *Phys. Rev. A.* 1991. V. 44 (4). P. 2374–2383.
- [5] *Boccaletti S., Pecora L.M., Pelaez A.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 63. P. 066 219.
- [6] *Brown R., Kocarev L.* // *Chaos.* 2000. V. 10 (2). P. 344–349.
- [7] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79 (7). С. 391–395.
- [8] *Храмов А.Е., Короновский А.А.* // *Chaos.* 2004. V. 14 (3). P. 603–610.
- [9] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80 (1). С. 25–28.
- [10] *Храмов А.Е., Короновский А.А., Levin Yu.I.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127 (4). P. 886–897.
- [11] *Храмов А.Е., Короновский А.А., Попов P.V., Rempen I.S.* // *Chaos.* 2005. V. 15 (1). P. 013 705.
- [12] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76 (11). P. 1804–1807.
- [13] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurth J.* // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55 (3). P. 2353–2361.
- [14] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* // *Int. J. Bifurcation and Chaos.* 2000. V. 10 (10). P. 2291–2305.

- [15] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* // Journal of Communications Technology and Electronics. 2002. V. 47 (2). P. 117–148.
- [16] *Anishchenko V.S., Astakhov V., Neiman A., Vadivasova T., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Developments. Springer–Verlag, Heidelberg, 2001.
- [17] *Pikovsky A., Rosenblum M., Osipov G., Kurths J.* // Physica D. 1997. V. 104 (4). P. 219–238.
- [18] *Osipov G.V.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91 (2). P. 024 101.
- [19] *Anishchenko V.S., Vadivasova T.E.* // Journal of Communications Technology and Electronics. 2004. V. 49 (1). P. 69–75.
- [20] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Europhysics Lett. 1996. V. 34 (3). P. 165–170.
- [21] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J., Osipov G.V., Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89 (26). P. 264 102.
- [22] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
- [23] *Zheng Z., Hu G.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62 (6). P. 7882–7885.