01;03

О силовом взаимодействии жидкости и тела, касающегося стенки

© *В.Л. Сенницкий*

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
E-mail: igil@hydro.nsc.ru

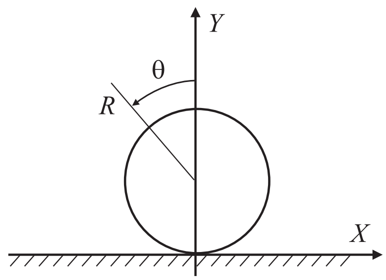
Поступило в Редакцию 12 апреля 2005 г.

Получено точное решение задачи о силовом взаимодействии однородно движущейся на бесконечности идеальной жидкости и находящегося в ней твердого кругового цилиндра, касающегося твердой стенки.

Нахождение силы, с которой жидкость действует на находящееся в ней тело, движение которого является заданным, может представлять самостоятельный интерес либо способствовать обнаружению новых гидромеханических эффектов (см. [1–4], а также [5] и приведенную там литературу).

В настоящей работе рассмотрена задача о силовом взаимодействии однородно движущейся на бесконечности идеальной несжимаемой жидкости и неподвижного абсолютно твердого цилиндра, касающегося неподвижной абсолютно твердой стенки. Получено точное решение задачи. Установлено, что цилиндр отталкивается от стенки.

В идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной извне плоской поверхностью абсолютно твердой стенки, находится абсолютно твердый бесконечно длинный круговой цилиндр (см. рисунок). Стенка и цилиндр покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z. Поверхность стенки совпадает с плоскостью $Y = 0$. Стенка и цилиндр соприкасаются друг с другом вдоль прямой линии, лежащей на оси Z. Занимаемая жидкостью область Ω содержится в полупространстве $Y \geqslant 0$. На бесконечности жидкость совершает заданное однородное движение со скоростью $\mathbf{V}_\infty = (V_\infty, 0, 0)$. В области Ω течение жидкости является потенциальным, плоским. Требуется определить силовое взаимодействие жидкости и цилиндра, т. е. найти силу $\mathbf{F}$, действующую со стороны жидкости на часть цилиндра, заключенную



между двумя плоскостями течения, отстоящими друг от друга на единичном расстоянии (сила, действующая со стороны указанной части цилиндра на жидкость, есть — **F**).

Пусть t — время, a — радиус цилиндра; R, θ — полярные координаты в плоскости $Z = 0$, связанные с X, Y соотношениями

$$X = -R\sin\theta, \quad Y = a + R\cos\theta; \tag{1}$$

F_x и F_y — проекции силы **F** соответственно на оси X и Y; Φ и ρ — потенциал скорости и плотность жидкости; P — давление в жидкости; I — функция t.

Формулы для сил F_x и F_y, интеграл Коши–Лагранжа, уравнение неразрывности и условия на твердой границе жидкости и на бесконечности имеют следующий вид:

$$F_x = a\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{|R=a}\sin\theta d\theta; \tag{2}$$

$$F_y = -a\int\limits_{-\pi}^{\pi} P_{|R=a}\cos\theta d\theta; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho} = I; \tag{4}$$

$$\Delta\Phi = 0 \quad (a < R < \infty, \quad 0 < Y < \infty); \tag{5}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = 0 \quad \text{при} \quad Y = 0, \quad -\infty < X < 0 \quad \text{и} \quad 0 < X < \infty; \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 0 \quad \text{при} \quad R = a, \quad -\pi < \theta < \pi; \tag{7}$$

$$\Phi \sim V_\infty X \quad \text{при} \quad R \to \infty, \quad 0 \leqslant Y. \tag{8}$$

Будем использовать координаты η, ξ, связанные с X, Y соотношениями

$$\eta = -2a\frac{X}{X^2 + Y^2}, \quad \xi = 2a\frac{Y}{X^2 + Y^2}. \tag{9}$$

Определяемые (9) функции $\eta = \eta(X, Y)$, $\xi = \xi(X, Y)$ осуществляют отображение сечения области Ω плоскостью $Z = 0$ в полосу $-\infty \leqslant \eta \leqslant \infty$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Перейдем в (5)–(8) к координатам η, ξ. В результате этого получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty, \quad 0 < \xi < 1); \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -\infty < \eta < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < \infty; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad -\infty < \eta < \infty; \tag{12}$$

$$\Phi \sim -2aV_\infty \frac{\eta}{\eta^2 + \xi^2} \quad \text{при} \quad \eta^2 + \xi^2 \to 0, \quad 0 \leqslant \xi. \tag{13}$$

Сделав в (10)–(13) подстановку

$$\Phi = \frac{\chi}{\operatorname{ch}\pi\eta - \cos\pi\xi}, \tag{14}$$

найдем

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi^2} + \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\eta - \cos\pi\xi}\left[-2\left(\operatorname{sh}\pi\eta\frac{\partial \chi}{\partial \eta} + \sin\pi\xi\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)\right.$$
$$\left. + \pi(\operatorname{sh}\pi\eta + \cos\pi\xi)\chi\right] = 0 \quad (-\infty < \eta < \infty, \quad 0 < \xi < 1); \tag{15}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \quad -\infty < \eta < 0 \quad \text{и} \quad 0 < \eta < \infty; \tag{16}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad -\infty < \eta < \infty; \tag{17}$$

$$\frac{\chi}{\operatorname{ch}\pi\eta - \cos\pi\xi} \sim -2aV_\infty \frac{\eta}{\eta^2+\xi^2} \quad \text{при} \quad \eta^2+\xi^2 \to 0, \quad 0 \leqslant \xi. \tag{18}$$

Задача (15)–(18) имеет решение

$$\chi = -\pi a V_\infty \operatorname{sh}\pi\eta. \tag{19}$$

Согласно (14), (19),

$$\Phi = -\pi a V_\infty \frac{\operatorname{sh}\pi\eta}{\operatorname{ch}\pi\eta - \cos\pi\xi}. \tag{20}$$

Из (1)–(4), (9), (20) следует

$$F_x = Aa^2\rho \frac{pV_\infty}{dt}, \qquad F_y = Ba\rho V_\infty^2, \tag{21}$$

где

$$A = 2\pi \int\limits_0^\pi \frac{\operatorname{sh}[\pi\sin\theta/(1+\cos\theta)]\sin\theta}{\operatorname{ch}[\pi\sin\theta/(1+\cos\theta)]+1}\,d\theta;$$

$$B = \pi^4 \int\limits_0^\pi \frac{\cos\theta}{\{\operatorname{ch}[\pi\sin\theta/(1+\cos\theta)]+1\}^2(1+\cos\theta)^2}\,d\theta. \tag{22}$$

Произведя в (22) подстановку $\theta = \arccos\frac{\pi^2-\varphi^2}{\pi^2+\varphi^2}$, а также принимая во внимание равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k k^{-2} = -\pi^2/12$ (см. [6]), можно показать, что $B = \frac{\pi}{9}(\pi^2+3)$. (Найденные численно значения A и B составляют соответственно около 10.34 и 4.49).

Формулами (21) определяется точное решение задачи о силовом взаимодействии жидкости и цилиндра. Из (21), в частности, следует, что цилиндр отталкивается от стенки: сила $\mathbf{F}$ направлена внутрь занимаемой жидкостью области.

Пусть движение жидкости на бесконечности состоит в совершении периодических с периодом T колебаний. Определим среднее по времени силовое взаимодействие жидкости и цилиндра. Используя (21), найдем

$$\langle F_x \rangle = 0, \qquad \langle F_y \rangle = Ba\rho\langle V_\infty^2 \rangle, \tag{23}$$

где $\langle \ldots \rangle = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} \ldots dt$. Из (23), в частности, следует, что сила $\langle \mathbf{F} \rangle$, будучи направленной внутрь занимаемой жидкостью области, перпендикулярна к границе стенки.

Отметим, что в аналогичных условиях среднее по времени силовое взаимодействие жидкости и твердого тела (кругового цилиндра, шара), находящегося вдали от стенки, таково, что тело притягивается к стенке (см. [1–3]).

Полученные результаты могут быть использованы при изучении явлений, связанных с течениями жидкости вдоль поверхностей раздела сред в присутствии на них неровностей, инородных частиц.

Автор выражает благодарность Н.А. Галевой за участие в вычислении интегралов.

Список литературы

[1] *Сенницкий В.Л.* // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
[2] *Луговцов Б.А., Сенницкий В.Л.* // ДАН СССР. 1986. Т. 289. № 2. С. 314–317.
[3] *Сенницкий В.Л.* // ПМТФ. 1999. Т. 40. № 4. С. 125–132.
[4] *Сенницкий В.Л.* // ПМТФ. 2000. Т. 41. № 1. С. 57–62.
[5] *Пятигорская О.С., Сенницкий В.Л.* // ПМТФ. 2004. Т. 45. № 4. С. 102–106.
[6] *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М.: ГИФ–МЛ, 1961. 315 с.