01;03

Аналитическое решение задачи о тепловом скольжении второго порядка с учетом вращательных степеней свободы молекул газа

© *А.В. Латышев, В.Н. Попов, А.А. Юшканов*

Поморский государственный университет, Архангельск
E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

Поступило в Редакцию 6 июня 2005 г.

Представлены результаты, полученные с использованием точных аналитических методов в задаче о тепловом скольжении второго порядка для многоатомных (число атомов в молекуле $N \geqslant 2$) газов с учетом вращательных степеней свободы. Проведены численный расчеты коэффициента теплового скольжения для ряда многоатомных газов. Показана зависимость скорости теплового скольжения второго порядка многоатомного газа от числа Прандтля.

Введение. Градиенты гидродинамических величин (температуры, массовой скорости газа, концентрации) вызывают такое явление, как скольжение разреженного газа вдоль обтекаемой поверхности [1]. Подобного рода скольжения разреженного газа вдоль твердой поверхности с использованием точных аналитических методов исследованы к настоящему времени достаточно подробно как для одноатомных, так и для многоатомных (число атомов в молекуле $N \leqslant 2$) газов. В то же время открытым остается вопрос о построении точных аналитических решений задач, связанных с обтеканием многоатомным газом искривленных поверхностей.

Целью представленной работы является построение точного аналитического решения задачи о тепловом скольжении второго порядка для случая многоатомного газа. В качестве основного уравнения используется обобщение БГК (Бхатлагар, Гросс, Крук)-модели кинетического уравнения на случай вращательных степеней свободы молекул газа, построенного в [2]. Предполагается, что колебательные степени свободы молекул газа „заморожены“, а вращательные описываются на основе классической кинетической теории газов.

Отметим, что для одноатомных газов точные аналитические решения рассматриваемой задачи построены в [3,4 и 5] соответственно с использованием БГК и ЭС моделей кинетического уравнения Больцмана, а также модели Вильямса.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений. Рассмотрим сферическую аэрозольную частицу, взвешенную в неоднородном по температуре разреженном многоатомном газе. Свяжем с центром частицы сферическую систему координат, полярную ось которой направим вдоль градиента температуры вдали от поверхности частицы. Вследствие неоднородности распределения температуры в объеме газа отличными от нуля являются величины $\partial T/\partial r$ и $\partial T/\partial\theta$. Предположим, что нормальная к поверхности компонента градиента температуры не постоянна, а медленно меняется вдоль поверхности частицы. Таким образом, отличной от нуля будет величина $\partial^2 T/\partial r\partial\theta$, которая и приводит к так называемому тепловому скольжению второго порядка. Будем считать рассматривамые величины малыми. Тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения частиц газа по координатам и скоростям, которую можно записать в виде

$$f = f^{(0)}\big[1 + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)\big],$$

где $f^{(0)}$ — равновесная функция распределения в объеме газа вдали от поверхности аэрозольной частицы; $\mathbf{r}_0 = 2\lambda\mathbf{r}/(\sqrt{\pi}\mathrm{Pr})$ — размерный радиус-вектор; λ — средняя длина свободного пробега молекул газа, связанная с его кинематической вязкостью ν_g соотношением $\lambda = \nu_g(\pi m/2k_BT)^{1/2}$; Pr — число Прандтля; $\mathbf{C} = \mathbf{v}\sqrt{m/2k_BT_\omega}$; $\nu = \omega\sqrt{J/2k_BT_\omega}$; $\mathbf{v}$ и ω — поступательная и вращательная скорости молекул газа; T_ω — температура поверхности частицы; k_B — постоянная Больцмана; m, J — масса и момент инерции молекул газа, а $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ является решением уравнения [2], записанного в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром аэрозольной частицы

$$\begin{aligned} C_r\frac{\partial Y}{\partial r} &+ Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + C_\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \frac{C_\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial Y}{\partial C_r} \\ &+ (C_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta)\frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta\operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi)\frac{\partial Y}{\partial C_\varphi} \\ &= \int k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu')Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}', \nu')d\Omega. \qquad (1.1) \end{aligned}$$

Здесь [2] $l = 2$ для двухатомного газа и $l = 5/2$ для N-атомного газа $(N \geqslant 2)$; $d\Omega = 2\pi^{-3/2}\exp(-C^2 - \nu^2)\nu d\nu d^3C$ для двухатомного газа и $d\Omega = \pi^{-3}\exp(-C^2 - \nu^2)d^3\nu d^3C$ для многоатомного газа, $k = 2\mathrm{Kn}/(\sqrt{\pi}\mathrm{Pr})$, $\mathrm{Kn} = \lambda/R_0$ — число Кнудсена, R_0 — размерный радиус аэрозольной частицы,

$$k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{l + 1/2}(C^2 + \nu^2 - l - 1/2)(C^2 + \nu'^2 - l - 1/2).$$

Решение (1.1) ищем в виде разложения по параметру k

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = Y_1(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + kY_2(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + \ldots \tag{1.2}$$

Учитывая (1.2), в ряд по параметру k будет разложена и касательная к поверхности частицы компонента безразмерной массовой скорости U_θ

$$U_\theta = U_\theta^{(1)} + kU_\theta^2 + \ldots$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и приравнивая слагаемые при k, приходим к уравнению для нахождения функции Y_2 $(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$

$$\begin{aligned} C_r\frac{\partial Y_2}{\partial x} + Y_2(x, \mathbf{C}, \nu) = \int k(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu')Y_2(x, \mathbf{C}', \nu')d\Omega \\ - \Bigg[(C_\theta^2 + C_\varphi^2)\frac{\partial Y_1}{\partial C_r} + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta - C_rC_\theta)\frac{\partial Y_1}{\partial C_\theta} \\ - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg}\theta + C_rC_\varphi)\frac{\partial Y_1}{\partial C_\varphi}\Bigg] - C_\theta\frac{\partial Y_1}{\partial \theta}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь

$$Y_1(x, \mathbf{C}, \nu) = \left[Z_1(x, C_r) + \gamma(C^2 + \nu^2 - l - 1/2)Z_2(x, C_r)\right]K_T, \tag{1.4}$$

$Z_1(x, C_r)$ и $Z_2(x, C_r)$ совпадают с функциями распределения, построенными в задаче о температурном скачке [2],

$$Z(x, \mu) = \int\limits_0^\infty \exp(-x/\eta)F(\eta, \mu)A(\eta)d\eta,$$

$$F(\eta,\mu)=\eta P\,\frac{1}{\eta-\mu}\,E+\exp(\eta^2)B(\eta)\delta(\eta-\mu),$$

$$B(\eta)=\lambda(\eta)E+\frac{1}{2l}\begin{bmatrix}1/2-\eta^2 & 1/2+l-\eta^2\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\lambda(z)=1+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)d\mu}{\mu-z},$$

$$A(\eta)=[A_1(\eta),A_2(\eta)]^t,\quad Z(x,\mu)=[Z_1(x,\mu)Z_2(x,\mu)]^t,$$

$\lambda(z)$ — дисперсионная функция Черчиньяни, E — единичная матрица, символ t означает транспонирование, $x=r-R_0$, Px^{-1} — распределение главного значения интеграла при интегрировании x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\gamma^2=1/(l+1/2)$, $K_T=(1/T_\omega)(\partial T/\partial r)$.

Решение уравнения (1.3) ищем в виде

$$Y_2(x,\mathbf{C},\nu)=C_\theta\psi(x,C_r,\nu)+\sum_k b_k(C_\theta,C_\varphi)\psi_k(x,C_r,\nu),\qquad(1.5)$$

где C_θ в совокупности с $b_k(C_\theta,C_\varphi)$ образует в пространстве скоростей полную систему ортогональных многочленов. Под ортогональностью многочленов $g(C)$ и $f(C)$ в пространстве скоростей подразумевается равенство нулю интеграла $\int\exp(-C^2)g(C)f(C)d\mathbf{C}$.

Подставим (1.4), (1.5) в (1.3). Домножая полученное соотношение на $\exp(-C_\theta^2-C_\varphi^2)$ и интегрируя по C_θ и C_φ от $-\infty$ до $+\infty$, приходим к уравнению для нахождения функции $\psi(x,\mu,\nu)$

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu,\nu)=\int\exp(-\mu'^2-\nu'^2)\psi(x,\mu',\nu')dg\,d\mu'$$
$$-k_T\left[Z_1(x,\mu)+\gamma(\mu^2+\nu^2-l+3/2)Z_2(x,\mu)\right].\quad(1.6)$$

Здесь $dg=2\pi^{-1/2}\nu d\nu$ для двухатомного газа и $dg=2\pi^{-1/2}d^3\nu$ для полиатомного, $\mu=C_r$, $k_T=(1/T_\omega)(\partial^2T/\partial r\partial\theta)$.

Решение (1.6) ищем в виде

$$\psi(x,\mu,\nu)=\varphi(x,\mu)+(\nu^2-l+1)\varphi_1(x,\mu).\qquad(1.7)$$

Подставим (1.7) в (1.6). Домножим полученное равенство в случае двухатомного газа на $\nu\exp(-\nu^2)$ и проинтегрируем по ν от 0 до

$+\infty$. В случае полиатомного газа полученное равенство домножим на $\exp(-\nu^2)$ и проинтегрируем по ν_i от $-\infty$ до $+\infty$. В обоих случаях приходим к одинаковой системе уравнений для нахождения $\varphi(x,\mu)$ и $\varphi_1(x,\mu)$

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\varphi(x,\tau)d\tau$$

$$-k_T[Z_1(x,\mu)+\gamma(\mu^2+1/2)Z_2(x,\mu)], \tag{1.8}$$

$$\mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\varphi_1(x,\mu)=-k_T\gamma Z_2(x,\mu).$$

Предположим, что молекулы газа отражаются от поверхности аэрозольной частицы диффузно. Тогда граничные условия для $\varphi(x,\mu)$ и $\varphi_1(x,\mu)$ запишутся в виде

$$\varphi(0,\mu=-2U_0,\quad \mu\geqslant 0,\quad \varphi(+\infty,\mu)=0, \tag{1.9}$$

$$\varphi_1(0,\mu)=0,\quad \mu\geqslant 0,\quad \varphi_1(+\infty,\mu)=0.$$

Так как искомая скорость скольжения U_0 входит лишь в граничные условия для функции $\varphi(x,\mu)$, то в дальнейшем можно ограничиться решением уравнения (1.8) с граничными условиями (1.9).

Обозначим

$$a(\eta,\mu)=a_1(\eta)+\mu^2a_2(\eta), \tag{1.10}$$

$$a_1(\eta)=k_T\left[A_1(\eta)+\frac{1}{2}\gamma A_2(\eta)\right],\quad a_2(\eta)=k_T\gamma A_2(\eta), \tag{1.11}$$

$$b(\mu)=\left[a(\mu,\mu)\lambda(\mu)+\frac{1}{2l}k_T(A_1(\mu)+\gamma(l+1)A_2(\mu))\right]\exp(\mu^2). \tag{1.12}$$

Тогда с учетом принятых обозначений (1.8) перепишем в виде

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\varphi(x,\mu)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\varphi(x,\tau)d\tau$$

$$-\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-x/\eta)\frac{\eta a(\eta,\mu)}{\eta-\mu}d\eta-\exp(-x/\mu)b(\mu)\Theta_+(\mu). \tag{1.13}$$

Таким образом, задача о вычислении скорости теплового скольжения второго порядка для многоатомных газов с учетом вращательных степеней свободы сводится к решению уравнения (1.13) с граничными условиями (1.9).

2. Расчет скорости теплового скольжения второго порядка. Уравнения (1.13) с граничными условиями (1.9) совпадают с аналогичным уравнением и граничными условиями, полученными в [3]. Поэтому, учитывая результаты [3], можем записать

$$U_0 = \frac{k_T}{2\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_0^\infty \eta^2 a_2(\eta)d\eta + 2\int\limits_0^\infty \frac{\eta a_3(\eta)}{X(-\eta)}\,d\eta\right], \tag{2.1}$$

$$a_3(\eta) = a_1(\eta) + \left[\eta\lambda(\eta)a(\eta,\eta) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta b(\eta)\exp(-\eta^2)\right]'.$$

Отсюда, с учетом (1.10)–(1.12) после интегрирования второго интеграла в (2.1) по частям, находим

$$U_0 = \frac{k_T}{2\sqrt{\pi}}\left[\gamma\int\limits_0^\infty \eta^2 A_2(\eta)d\eta\right.$$

$$+ 2\int\limits_0^\infty \eta\,[(1+1/l)A_1(\eta) + \gamma(3/2+1/l)A_2(\eta)]\,\frac{d\eta}{X(-\eta)}$$

$$\left. + \frac{1}{l}\int\limits_0^\infty \eta^2\,[A_1(\eta) + \gamma(l+1)A_2(\eta)]\,\frac{d\eta}{X(-\eta)}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\theta(\tau)-\pi}{(\tau+\eta)^2}d\tau\right]. \tag{2.2}$$

Здесь [2]

$$\mu A_j(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[(X_{j1}^+(\mu) - X_{j1}^-(\mu))\left(\alpha_1\mu + \alpha_0 + \frac{\alpha-1}{\mu-\mu_0}\right)\right.$$

$$\left. + (X_{j2}^+(\mu) - X_{j2}(\mu))\left(\beta_1\mu + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{\mu-\mu_0}\right)\right], \quad i = 1, 2,$$

$$X_{11}^{+}(\mu)-X_{11}^{-}(\mu)=\mp\left[\left(1-\frac{\mu^2+1/2}{r(\mu)}\right)U_1(\mu)\sin\theta_1(\mu)\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{\mu^2+1/2}{r(\mu)}\right)U_2(\mu)\sin\theta_2(\mu)\right],$$

$$X_{12}^{+}(\mu)-X_{12}^{-}(\mu)=\pm\frac{2\gamma(\mu^2-l-1/2)}{r(\mu)}\left[U_1(\mu)\sin\theta_1(\mu)-U_2(\mu)\sin\theta_2(\mu)\right],$$

$$X_{21}^{+}(\mu)-X_{21}^{-}(\mu)=\mp\frac{2}{\gamma r(\mu)}\left[U_1(\mu)\sin\theta_1(\mu)-U_2(\mu)\sin\theta_2(\mu)\right],$$

$$X_{22}^{+}(\mu)-X_{22}^{-}(\mu)=\mp\left[\left(1+\frac{\mu^2+1/2}{r(\mu)}\right)U_1(\mu)\sin\theta_1(\mu)\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{\mu^2-1/2}{r(\mu)}\right)U_2(\mu)\sin\theta_2(\mu)\right],$$

где верхний знак относится к интервалу $0\leqslant\mu\leqslant\mu_0$, нижний — к интервалу $\mu>\mu_0$,

$$U_j(z)=\exp\left[-A(z)+(-1)^j r(z)(B(z)+R(z))\right],\quad j=1,2,$$

$$A(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{a(\tau)d\tau}{\tau-z},\qquad B(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{b(\tau)}{r(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

$$R(z)=\int\limits_0^{\mu_0}\frac{d\tau}{r(\tau)(\tau-z)},$$

$$a(\tau)=\theta_1(\tau)+\theta_2(\tau)-2\pi,\qquad b(\tau)=\theta_1(\tau)-\theta_2(\tau),$$

$$\theta_\alpha(\mu)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\Omega_\alpha(\mu)}{\sqrt{\pi\mu}\exp(-\mu^2)},\quad (ij=1,2),$$

$$\Omega_\alpha(z)=\lambda(z)-\frac{1}{10}\left[z^2-\frac{3}{2}+(-1)^\alpha r(z)\right],\quad \alpha=1.2,$$

$$r(z)=\sqrt{q(z)},\qquad q(z)=\left(z^2-\frac{3}{2}\right)^2+4l,$$

значение μ_0 находится из уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{b(\tau)d\tau}{r(\tau)}+\int\limits_0^{\mu_0}\frac{d\tau}{r(\tau)}=0,$$

$$\alpha_1=q_0,\quad \beta_1=-q_0/\gamma,\quad \beta_{-1}=\mu_0^2\frac{\alpha_1-\delta\beta_1}{\alpha-\delta},\quad \alpha_{-1}=\alpha\beta_{-1},$$

$$\alpha=-\frac{1}{2}\gamma\left[r(\mu_0)+\mu_0^2+1/2\right],\quad \beta_0=-\mu_0\beta_1+\frac{2\mu_0(\alpha_1-\delta\beta_1)-\alpha'\beta_{-1}}{\alpha-\delta},$$

$$\delta=\frac{1}{2}\gamma[r(0)-1/2],\quad \alpha'=-\mu_0\gamma\,\frac{\mu_0^2-3/2+r(\mu_0)}{\alpha-\delta},$$

$$\alpha_0=\delta\beta_0+\mu_0(\alpha_1-\delta\beta_1),$$

$$X(z)=\frac{1}{z}\exp\left\{-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{(\theta(\tau)-\pi)d\tau}{\tau-z}\right\},$$

$$\theta(\tau)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\,\exp(-\tau^2)},$$

$$q_0=\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\tau\,b(\tau)d\tau}{r(\tau)}-\int\limits_0^{\mu_0}\frac{\tau\,d\tau}{r(\tau)}\right].$$

Проведенные расчеты показывают, что $U_0=0.5740k_T$ для двухатомных газов и $U_0=0.5873k_T$ для полиатомных.

Перейдем в полученных выражениях к размерным величинам и запишем в виде, принятом в кинетической теории разреженного газа (см., например, [3])

$$u_\theta|_S=K_{Ts}\beta_R\mathrm{Kn}\nu_g\frac{1}{T_\omega}\frac{\partial^2T}{\partial r_0\partial\theta}|_S.$$

Учитывая, что для многоатомных газов $K_{Ts}=0.7662/\mathrm{Pr}$ [2], находим $\beta_R=1.6934/\mathrm{Pr}$ для двухатомных и $\beta_R=1.7299/\mathrm{Pr}$ для полиатомных.

Так, например, для хлора Cl_2 ($\mathrm{Pr}=0.64$) и окиси углерода CO ($\mathrm{Pr}=0.74$) коэффициент теплового скольжения равен соответственно 2.64459 и 2.2884. Для одноатомных газов β_R не зависит от числа

Прандтля и, в частности, для БГК модели равен 2.3524 [3]. При этом различие в результатах составляет порядка $2.7 \div 11.1\%$.

Заключение. Итак, в работе с использованием точных аналитических методов вычислена скорость теплового скольжения второго порядка для случая многоатомных газов. Установлено, что коэффициент теплового скольжения второго порядка существенным образом зависит от числа Прандтля. Показано, что учет вращательных степеней свободы приводит к существенному отличию от аналогичных результатов, полученных без учета структуры молекул газа.

Список литературы

[1] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.

[2] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ПММ. 2002. Т. 66. В. 5. С. 845–854.

[3] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Изв. РАН. Сер. МЖГ. 2003. № 3. С. 183–193.

[4] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 1 (13). С. 60–71.

[5] *Латышев А.В., Попов В.Н., Юшканов А.А.* // Теплофизика высоких температур. 2003. № 6. С. 132–136.