01;07

Новый подход к расчету вытекающих мод многослойных волноводных структур, основанный на точном методе конечных разностей

© Е.И. Голант

Государственное федеральное унитарное предприятие НПП „Исток“, Фрязино, Московская область

Поступило в Редакцию 11 июля 2005 г.

На примере многослойных планарных оптических волноводов, волноведущие свойства которых определяются не полным внутренним отражением от границы ядра и оболочки, как в обычных оптических волноводах, а антирезонансным отражением от многослойной оболочки, так называемым ARROW волноводов демонстрируется эффективность нового численного метода расчета электромагнитных мод — точного метода конечных разностей (EFDM), представляющего собой синтез метода конечных разностей и метода матрицы переноса. Предлагаемый метод равно применим как к расчету электромагнитных мод в диэлектрических волноводах, так и к расчету квантовых состояний электронов в многобарьерных полупроводниковых гетероструктурах.

Приводятся результаты сравнения характеристик 9-слойного волновода, рассчитанных на основе предлагаемого подхода, с известными из литературы, полученными с помощью решения дисперсионного уравнения в рамках метода матрицы переноса. В качестве примера приводятся результаты расчета спектральных зависимостей радиационного затухания первой вытекающей TE моды планарных оптических волноводов с различным числом слоев.

Задача определения мод многослойного планарного оптического волновода сводится к решению стационарного волнового уравнения (уравнения Шредингера) для среды с кусочно-постоянным (ступенчатым) профилем коэффициента преломления (потенциальной энергии):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_j^2\psi = 0, \tag{1}$$

где $k_j = \sqrt{n_j^2 k_0^2 - \gamma^2}$ — поперечный волновой вектор j участка планарного волновода с коэффициентом преломления n_j, $\gamma = \beta - i\alpha$ —

продольная, в общем случае комплексная, постоянная распространения волны, бегущей в направлении z и имеющей фазовый множитель $\exp[i(\omega t - \gamma z)]$, $k_0 = \omega/c$ — волновой вектор свободного пространства, ω — круговая частота, c — скорость света в пустоте; $\psi = E_y$ — для TE волн и $\psi = H_y$ — для TM волн.

На границах между слоями с различными коэффициентами преломления должны выполняться условия связи

$$\psi(x_{j+}) = \psi(x_{j-}),\ \frac{1}{\mu_j}\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x_{j+}} = \frac{1}{\mu_{j-1}}\frac{d\psi}{dx}\bigg|_{x_{j-}}, \qquad (2)$$

где $\mu_j = \begin{cases} 1 \text{ для TE волн,} \\ n_j^{-2} \text{ для TM волн.} \end{cases}$

Знак плюс относится к слою, лежащему в положительном направлении от точки j, в то время как минус — в отрицательном. Отметим, что для случая электронных волн в полупроводниковых гетероструктурах $\mu_j = \frac{m_j^*}{m_0}$, где m_j^* — эффективная масса электрона, m_0 — масса свободного электрона.

Предполагается, что волноведущая структура ограничена полупространствами с коэффициентами преломления n_s и n_c, причем положительное направление оси x выбрано от n_s к n_c.

Для $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$ общее решение уравнения (1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A_j \cos[k_j(x - x_j)] + B_j \sin[k_j(x - x_j)] \\ &= R_j e^{ik_j(x-x_j)} + S_j e^{-ik_j(x-x_j)}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Используя условия связи (2), можно получить явные выражения для коэффициентов матриц T_j [1], связывающих значения волновой функции ψ и непрерывной величины $\mu_j^{-1}\psi' = \mu_j^{-1}\frac{d\psi}{dx}$ в смежных сечениях. Перемножение матриц T_j дает так называемую матрицу переноса $T = T_{N-1}\dots T_2T_1 = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}$, связывающую значения волновой функции и ее производной в граничных сечениях. Полагая, что при $x < x_1$, $\psi(x) = R_s e^{ik_s(x-x_1)}$, а при $x > x_N$, $\psi(x) = S_c e^{-ik_c(x-x_N)}$, т.е. в граничных полупространствах имеются только уходящие (при действительном ik-затухающие) волны, легко получить дисперсионное уравнение относительно продольной комплексной постоянной распространения γ:

$$\mu_c^{-1} ik_c t_{11} - \mu_s^{-1}\mu_c^{-1} k_s k_c t_{12} + t_{21} + \mu_c^{-1} ik_s t_{22} = 0. \tag{4}$$

Корни этого уравнения $\gamma = \beta - i\alpha$ дают искомые действительную постоянную распространения β и постоянную затухания α вытекающих мод волновода. С незначительными вариациями описанный выше подход используется в большинстве известных работ по численному расчету мод в ARROW структурах.

Метод и результаты. В описанном выше подходе имеются две существенные трудности.

1. Вычисление комплексных коэффициентов матрицы передачи T путем прямого произведения матриц T приводит к накоплению ошибок округления, а даже незначительное искажение дисперсионного уравнения (4) приводит к серьезной погрешности в определении комплексной постоянной распространения. Качественное объяснение таково: присутствие экспоненциально нарастающих компонент в общем решении исходной дифференциальной задачи нарушает вычислительную устойчивость, строгое доказательство приведено в [2]

2. Нахождение комплексных корней трансцендентного дисперсионного уравнения (4) требует применения весьма сложных вычислительных процедур [1,3]. Обе эти трудности заметно усугубляются с увеличением числа слоев волновода N. В то же время расчет оптических волноводов, так же как и полупроводниковых гетероструктур, например для квантовых каскадных лазеров [4], содержащих десятки и сотни слоев, приобретает все большую актуальность.

В настоящей работе предлагается новый подход, — используя явный вид матриц T_j [1], построить разностную схему, связывающую значения волновой функции ψ в трех последовательных точках ψ_{j-1}, ψ_j, ψ_{j+1}:

$$\left[\mu_j^{-1}\frac{k_j d_j}{\sin(k_j d_j)}\left(\frac{\psi_{j+1}-\psi_j}{d_j}\right) - \mu_{j-1}^{-1}\frac{k_{j-1}d_{j-1}}{\sin(k_{j-1}d_{j-1})}\left(\frac{\psi_j-\psi_{j-1}}{d_{j-1}}\right)\right]$$
$$\times\frac{2}{d_j+d_{j-1}} + \left[\mu_j^{-1}k_j^2\frac{\mathrm{tg}(k_j d_j/2)}{k_j d_j/2} + \mu_{j-1}^{-1}k_{j-1}^2\frac{\mathrm{tg}(k_{j-1}d_{j-1}/2)}{k_{j-1}d_{j-1}/2}\right]\psi_j = 0, \tag{5}$$

где $d_j = x_{j+1} - x_j$ — толщина j слоя.

Эта схема имеет вид, характерный для стационарной разностной аппроксимации уравнения (1) с условиями связи (2). Более того, схема (5) в пределе $\max(d_j) \to 0$ переходит в стандартную разностную схему второго порядка точности для уравнений (1), (2). Однако в отличие от стандартной полученная разностная схема является точной для волноводных структур со ступенчатым поперечным профилем коэффициента преломления. Присоединяя краевые условия к системе уравнений (5), получаем замкнутую систему из N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными и действительной симметричной трехдиагональной матрицей. Важным преимуществом (5) является возможность применения для решения (5) экономичных и численно устойчивых методов, развитых для решения разностных уравнений с трехдиагональными матрицами, в частности встречной сопряженной прогонки [5].

Полученная система уравнений решается в предположении отсутствия затухания $\alpha = 0$ и действительности волновой функции ψ_N. Предполагаемая достаточно малой (рассчитываются долгоживущие моды) мнимая часть постоянной распространения α определяется на следующем этапе вычислений. В этом заключается одна из основных идей предлагаемого метода — разделить вычисление действительной и мнимой части постоянной распространения. В результате, по заданным продольной постоянной распространения β и действительным значениям волновой функции ψ_0 (или ее производной ψ'_0) на границе, решение уравнений (5) с соответствующими граничными условиями дает действительные же значения волновой функции во всех остальных точках (сечениях) волноводной структуры.

При таком подходе подразумевается, что в волновод извне, через одну или обе границы с внешними полупространствами поступает электромагнитная энергия, обеспечивающая отсутствие затухания распространяющейся волны. Поступающая мощность, очевидно, равна мощности, излучаемой волной во внешнее пространство. Обозначим эту мощность (отнесенную к единице площади излучаемой поверхности) — P_x, а мощность, переносимую волной внутри волновода в направлении распространения z (отнесенную к единице длины в направлении, перпендикулярном плоскости x, z), — P_z. Отношение $P_x(\beta)/P_z(\beta) = \alpha$ имеет смысл коэффициента затухания рассматриваемой моды и изменяется с изменением β. Минимумы на зависимости $P_x(\beta)/P_z(\beta)$ соответствуют самым долгоживущим модам, для которых реализуются наиболее благоприятные условия антирезонансного отражения от обо-

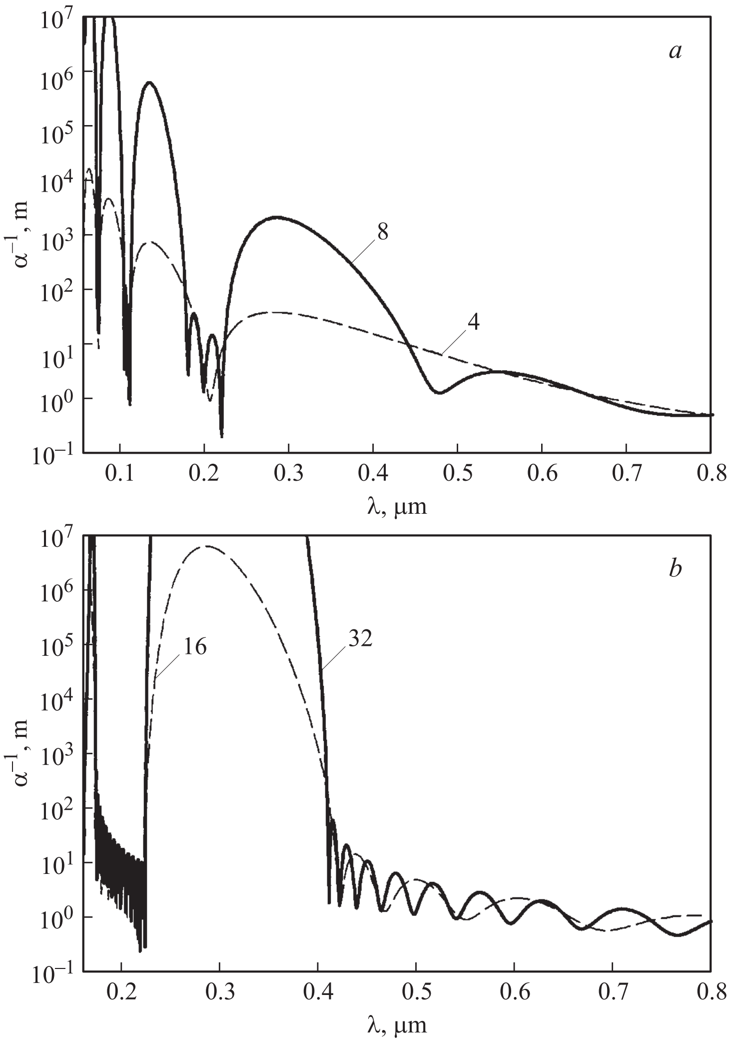
9-layer ARROW Waveguide: $n_s = 3.5$, $n_1 = 1.46$, $n_2 = 1.50$, $n_3 = 1.46$, $n_4 = 1.50$, $n_5 = 1.46$, $n_6 = 1.50$, $n_7 = 1.46$, $n_8 = 1.50$, $n_9 = 1.46$, $n_c = 1.0$, $d_1 = 2.0\,\mu$m, $d_2 = 448\,\mu$m, $d_3 = 4.0\,\mu$m, $d_4 = 0.448\,\mu$m, $d_5 = 2.0\,\mu$m, $d_6 = 0.448\,\mu$m, $d_7 = 4.0\,\mu$m, $d_8 = 0.448\,\mu$m, $d_9 = 2.0\,\mu$m, $\lambda = 0.6328\,\mu$m				
	Present Method		Reference [7]	
Mode	βk_0	α/k_0	β/k_0	α/k_0
TE_1	1.457920191	$0.0071059441 \cdot 10^{-4}$	1.457920191	$0.007106242 \cdot 10^{-4}$
TE_2	1.457791244	$0.0090529995 \cdot 10^{-4}$	1.457791244	$0.009053396 \cdot 10^{-4}$
TE_3	1.453780369	$0.1145698295 \cdot 10^{-4}$	1.453780369	$0.114698816 \cdot 10^{-4}$
TE_4	1.453045405	$0.4186909382 \cdot 10^{-4}$	1.453045406	$0.420121480 \cdot 10^{-4}$
TE_5	1.451864810	$0.6904035922 \cdot 10^{-4}$	1.451864807	$0.693651857 \cdot 10^{-4}$
TE_6	1.450269492	$0.7293545637 \cdot 10^{-4}$	1.450269491	$0.732515869 \cdot 10^{-4}$

лочки ARROW волновода. По вычисленным ранее значениям волновой функции $P_x(\beta)$ и $P_z(\beta)$ находятся аналитически в замкнутом виде.

Таким образом, имеются два принципиальных момента, обеспечивающих эффективность предложенного метода: использование точной разностной аппроксимации и новый по сравнению с известными [6] способ вычисления коэффициента затухания вследствие радиационных потерь.

Для сравнения с данными, полученными в [1] на основе сложных численных методов поиска комплексных корней дисперсионных уравнений (4), был приведен расчет первых 6 TE мод 9-слойного ARROW волновода из работы [1]. Результаты приведены в таблице.

Видно полное совпадение (до десяти значащих цифр) полученных нами постоянных распространения (эффективных индексов) мод с решениями комплексного дисперсионного уравнения, полученного в работе [3]. Что касается потерь (коэффициента затухания), то здесь, как и следовало ожидать, совпадение значительно хуже: 4–5 значащих цифр для мод с малыми потерями и 2–3 с относительно большими. Однако для подавляющего большинства практических применений такой точности расчета коэффициента затухания вполне достаточно. Увеличение относительной точности с уменьшением величины затухания обусловлено резонансным характером интерференции волн в оболочке ARROW волноводов. В условиях резонанса предложенный нами метод является очень хорошей аппроксимацией излучаемой волноводом мощности



Зависимость характерной длины затухания α^{-1} (m) от длины волны света в свободном пространстве для первой (вытекающей) моды симметричного планарного брэгговского волновода с ядром толщиной $80\,\mu$m, окруженным слоями равной толщины $0.323\,\mu$m с чередующимся коэффициентом преломления 1.50/1.46. Цифры у кривых соответствуют числу пар слоев оболочки: *a* — 4 и 8, *b* — 16 и 32.

(мощности потерь), которая становится тем лучше, чем более острый характер носит резонанс, иными словами чем более долгоживущей является рассматриваемая мода.

В качестве еще одной демонстрации возможностей предлагаемого метода на рисунке приведены результаты расчета зависимости характерной длины затухания α^{-1} от длины волны света в свободном пространстве для первой (вытекающей) TE моды планарных брэгговских волноводов с ядром толщиной $80\,\mu$m и оболочкой, состоящей из слоев равной толщины $0.323\,\mu$m с чередующимся коэффициентом преломления 1.50/1.46. На рисунке, в частности, хорошо видно, как при увеличении числа слоев оболочки формируются полосы пропускания и запирания волновода.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04–02–16441 и 04–02–17177).

Список литературы

[1] *Chen C., Berini P., Feng D., Tanev S., Tzolov V.P.* // Optics Express. 2000. V. 7. P. 260.
[2] *Mayer A., Vigneron J.-P.* // Physical Review. E. 1999. V. 59. P. 4659.
[3] *Anemogiannis E., Glytsis E.N., Gaylord T.K.* // J. Lightwave Tech. 1999. V. 17. P. 929.
[4] *Kramer B.* (ed.) // Adv. in Solid State Phys. 2003. V. 43. P. 351.
[5] *Голант Е.И., Кальфа А.А., Пореш С.Б., Тагер А.С.* // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1981. В. 7. С. 23–28.
[6] *Huang W.P., Shubair R.M., Nathan A., Chow Y.L.* // J. Lightwave Technol. 1992. V. 10. P. 1015.