

01;09

## Оценка порядка и реконструкция модельного уравнения системы с запаздыванием

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН  
E-mail: sbire@sgu.ru

Поступило в Редакцию 15 марта 2006 г.

Предложен новый метод определения времени задержки в системах с запаздыванием высокого порядка. Метод позволяет получить высокое качество реконструкции модельного дифференциального уравнения для системы с запаздыванием высокого порядка и может быть использован для определения априорно неизвестного порядка системы с запаздыванием.

PACS: 02.30.Ks

1. При реконструкции систем с запаздыванием по временным рядам необходимо учитывать, что эти системы обладают бесконечно большим числом степеней свободы. Это осложняет решение задачи реконструкции, вынуждая разрабатывать специальные методы. Большинство из этих методов ориентировано на восстановление модельных дифференциальных уравнений систем с запаздыванием первого порядка [1–5]. Возможность реконструкции систем второго порядка с запаздыванием по скалярным временным рядам исследовалась в работах [6–9]. Однако при больших значениях параметров, отвечающих за инерционные свойства системы, предложенный в [9] метод дает завышенные оценки времени запаздывания, а в работах [6–8] не рассматривается восстановление параметров инерционности и для реконструкции нелинейной функции используются только точки специальным образом подбираемого сечения фазового пространства, что требует наличия длинного ряда для качественного восстановления нелинейной функции. В данной работе мы предлагаем новый метод определения времени задержки в системах с запаздыванием высокого порядка, требующий существенно меньше вычислительных затрат, чем методы определения времени запаздывания, основанные на вычислении филл-фактора спроецирован-

ного временного ряда [6] и минимизации одношаговой ошибки прогноза восстанавливаемого модельного уравнения [7,8]. Предлагаемый метод позволяет повысить качество реконструкции модельных уравнений систем с запаздыванием высокого порядка и может быть использован для определения априорно неизвестного порядка систем с запаздыванием.

2. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальным уравнением второго порядка с запаздыванием:

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = F(x(t), x(t - \tau_1)), \quad (1)$$

где  $\tau_1$  — время запаздывания, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — параметры, характеризующие инерционные свойства системы. В работе [4] нами было показано, что во временных реализациях систем с запаздыванием первого порядка ( $\varepsilon_2 = 0, \varepsilon_1 \neq 0$ ) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания  $\tau_1$ . Для нахождения  $\tau_1$  в таких системах предлагалось определить для различных значений времени  $\tau$  число  $N$  пар экстремумов во временной реализации, удаленных друг от друга на  $\tau$ , и построить зависимость  $N(\tau)$ . Значению времени запаздывания  $\tau_1$  соответствует положение абсолютного минимума  $N(\tau)$ . Эта же методика определения времени запаздывания по временному ряду была применена нами в [9] к системе второго порядка вида (1). Однако в системах с запаздыванием второго и более высокого порядка такой способ оценки  $\tau_1$  оказывается приближенным. Он дает достаточно точную оценку времени запаздывания лишь при малых значениях  $\varepsilon_i$ . С увеличением параметров  $\varepsilon_i$  абсолютный минимум зависимости  $N(\tau)$  сдвигается от  $\tau_1$  в сторону больших значений. Чем больше значения  $\varepsilon_i$ , характеризующие влияние инерционных элементов системы, тем больше сдвиг. Этот сдвиг минимума  $N(\tau)$  не зависит от величины  $\tau_1$ .

Покажем, что метод определения времени задержки, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда [4], можно модифицировать для систем с запаздыванием высокого порядка. Продифференцировав уравнение (1) по времени, получим

$$\varepsilon_2 \ddot{\dot{x}}(t) + \varepsilon_1 \dot{\dot{x}}(t) = \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1))}{\partial x(t)} \dot{x}(t) + \frac{\partial F(x(t), x(t - \tau_1))}{\partial x(t - \tau_1)} \dot{x}(t - \tau_1). \quad (2)$$

Для построения зависимости  $N(\tau)$  будем использовать не все экстремальные точки  $\dot{x}(t) = 0$ , как в случае систем с запаздыванием первого

порядка, а только те из них, в которых вторая и третья производные,  $\dot{x}(t)$ , и  $\ddot{x}(t)$ , имеют одинаковый знак. Как видно из уравнения (2), при  $\dot{x}(t) = 0$  и положительных  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  в таких точках должно выполняться условие  $\dot{x}(t - \tau_1) \neq 0$ . Это означает, что на удалении  $\tau_1$  от экстремума не должно быть другого экстремума, а следовательно, значение  $N(\tau_1) \rightarrow 0$ .

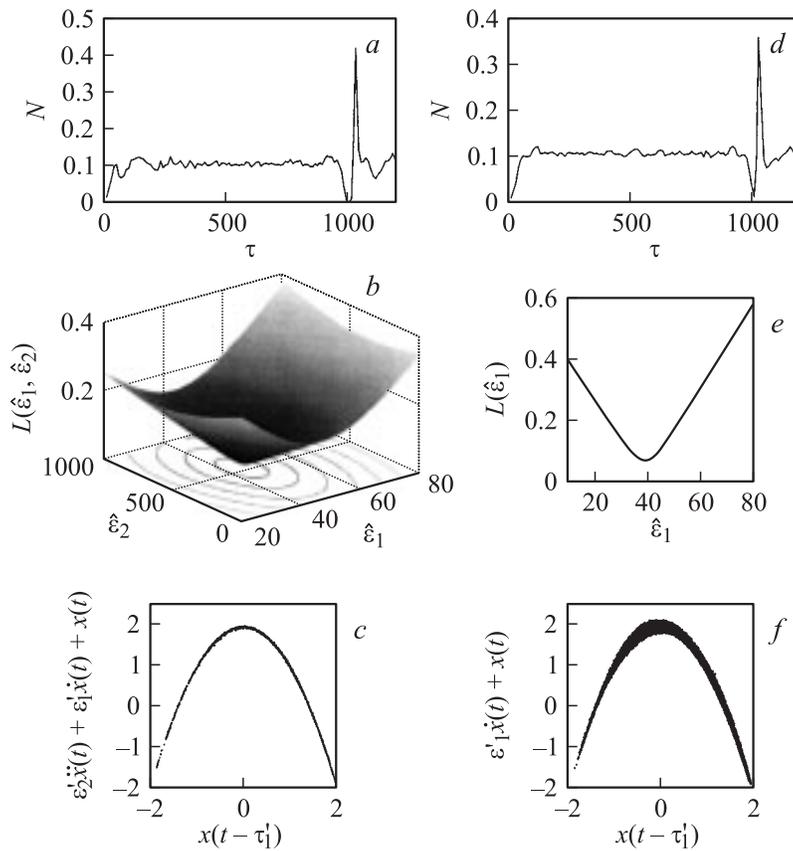
Мы применили модифицированный метод к временным рядам уравнения генератора с запаздывающей обратной связью

$$\varepsilon_2 \ddot{x}(t) + \varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)) \quad (3)$$

с квадратичной нелинейной функцией  $f(x) = \lambda - x^2$ , где  $\lambda$  — параметр нелинейности, и параметрами  $\tau_1 = 1000$ ,  $\lambda = 1.95$ ,  $\varepsilon_1 = 45$ ,  $\varepsilon_2 = 500$ . Подсчитав для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом  $\Delta\tau = 10$ , число  $N$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{x}(t - \tau)$  при условии, что  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  одного знака, построим зависимость  $N(\tau)$  (рис. 1, *a*).  $N(\tau)$  нормировано на число экстремальных точек во временном ряду, в которых  $\dot{x}(t)$  и  $\ddot{x}(t)$  имеют одинаковый знак. Для оценки производных по временному ряду мы использовали локальную полиномиальную аппроксимацию. Абсолютный минимум  $N(\tau)$  наблюдается при  $\tau = \tau_1 = 1000$ . Для сравнения на рис. 1, *d* приведен график  $N(\tau)$ , построенный по всем экстремальным точкам и нормированный на их общее число. При шаге изменения  $\tau$ , равном 10, такой график демонстрирует минимум при  $\tau'_1 = 1010$ .

Для оценки возможностей нового метода при наличии возмущений мы применили его к рядам, полученным при добавлении к временному ряду уравнения (3) гауссовского белого шума с нулевым средним значением. Для случаев, когда добавленный шум имел среднеквадратичное отклонение, составляющее до 10% от среднеквадратичного отклонения исходного ряда, положение минимума  $N(\tau)$  все еще позволяло нам точно восстановить время запаздывания  $\tau'_1 = 1000$ .

Модифицированный метод определения времени запаздывания, рассмотренный на примере систем второго порядка, может быть распространен на системы с запаздыванием более высокого порядка. В этом случае для построения графика  $N(\tau)$  необходимо использовать только экстремумы, в которых все производные высокого порядка  $x^{(n)}(t)$ ,  $n = 2, \dots, k + 1$ , где  $k$  — порядок уравнения, имеют одинаковый знак. Однако с увеличением порядка системы для реализации метода требу-



**Рис. 1.** Восстановление системы с запаздыванием второго порядка: *a* — модифицированный график  $N(\tau)$ ,  $N_{\min}(\tau) = N(1000)$ ; *b* — зависимость  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ , нормированная на число точек временного ряда, при  $\tau_1' = 1000$ ,  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = L(44.5, 538) = 0.012$ ; *c* — восстановленная нелинейная функция при  $\tau_1' = 1000$ ,  $\varepsilon_1' = 44.5$ ,  $\varepsilon_2' = 538$ ; *d* — график  $N(\tau)$ , построенный по всем экстремумам временного ряда,  $N_{\min}(\tau) = N(1010)$ ; *e* — зависимость  $L(\hat{\varepsilon}_1)$ , нормированная на число точек временного ряда, при  $\tau_1' = 1010$ ,  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1) = L(39) = 0.072$ ; *f* — восстановленная нелинейная функция при  $\tau_1' = 1010$  и  $\varepsilon_1' = 39$ .

ются все более длинные временные ряды, а точность снижается из-за погрешностей численного нахождения производных высокого порядка.

Для восстановления по хаотической временной реализации нелинейной функции  $f$  и параметров инерционности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  системы (3) мы строили в соответствии с методикой [9] зависимость  $\hat{\varepsilon}_2 \dot{x}(t) + \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_1')$  при различных параметрах  $\hat{\varepsilon}_1$  и  $\hat{\varepsilon}_2$  и рассчитывали длину линии  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_1'), \hat{\varepsilon}_2 \dot{x}(t) + \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине координаты  $x(t - \tau_1')$ . График  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  (рис. 1, *b*), построенный при шаге изменения  $\hat{\varepsilon}_1$ , равном 0.5, и шаге изменения  $\hat{\varepsilon}_2$ , равном 2, демонстрирует минимум при  $\varepsilon_1' = 44.5$  и  $\varepsilon_2' = 538$ . Восстановленная при этих значениях параметров нелинейная функция (рис. 1, *c*) достаточно хорошо совпадает с истинной квадратичной функцией системы.

3. Предложенная нами модификация метода реконструкции систем с запаздыванием высокого порядка может быть использована для определения априорно неизвестного порядка систем с запаздыванием по временному ряду. Идея такого подхода состоит в том, чтобы сначала восстановить исследуемую систему в предположении, что она описывается уравнением с запаздыванием первого порядка, затем восстановить ее как систему с запаздыванием второго порядка и т.д. Критерием правильного выбора порядка модельного дифференциального уравнения может служить однозначность восстановленной нелинейной функции. Количественным показателем однозначности при этом может выступать минимальная длина линии  $L$ , соединяющей точки на графике восстановленной функции.

Например, пусть у нас имеется временной ряд системы с запаздыванием второго порядка (3), но порядок этой системы нам заранее неизвестен. Проведем сначала реконструкцию модельного уравнения, полагая, что оно первого порядка и имеет вид

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau_1)). \quad (4)$$

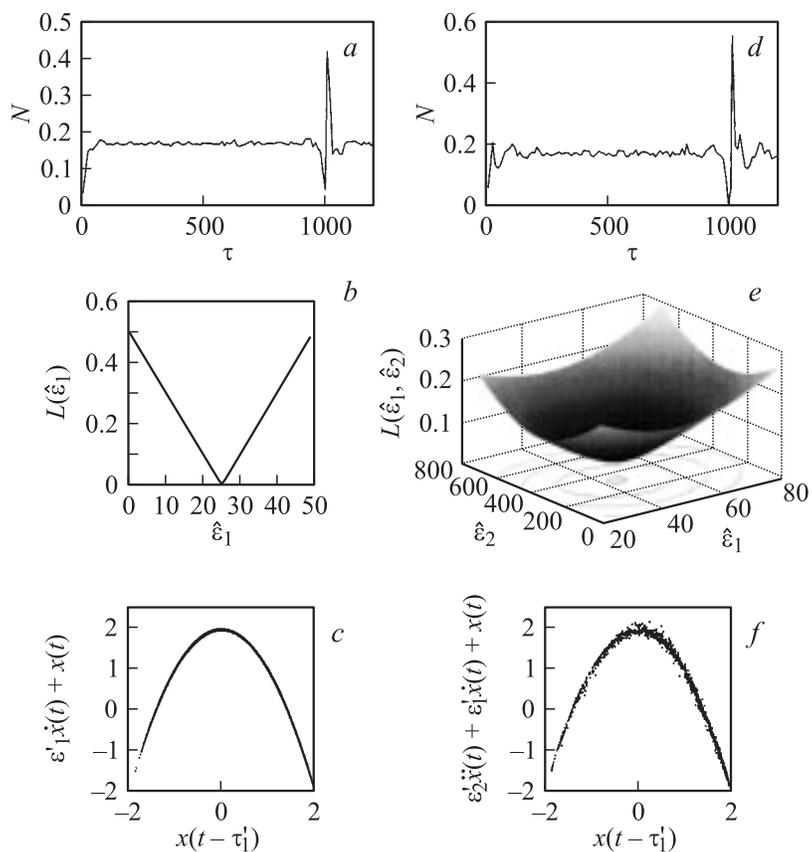
Время задержки определяем по уже рассмотренному выше графику  $N(\tau)$  (рис. 1, *d*), который дает оценку  $\tau_1' = 1010$ . Для восстановления параметра  $\varepsilon_1$  строим зависимость  $\hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t)$  от  $x(t - \tau_1')$  для различных значений  $\hat{\varepsilon}_1$  и рассчитываем длину линии  $L(\hat{\varepsilon}_1)$ , соединяющей точки на плоскости  $(x(t - \tau_1'), \hat{\varepsilon}_1 \dot{x}(t) + x(t))$ , упорядоченные по величине абсциссы. При шаге изменения  $\hat{\varepsilon}_1$ , равном 1, минимум  $L(\hat{\varepsilon}_1)$  наблюдается при  $\varepsilon_1' = 39$  (рис. 1, *e*). Восстановленная нелинейная функция приведена

на рис. 1,*f*. Сравним теперь полученные результаты с результатами реконструкции системы в виде уравнения второго порядка. Качество восстановления нелинейной функции на рис. 1, *c* заметно лучше, чем на рис. 1,*f*, а минимум  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = L(44.5, 538) = 0.012$  на рис. 1, *b* в 6 раз меньше, чем  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1) = L(39) = 0.072$  на рис. 1, *e*. Это указывает на то, что система лучше описывается уравнением второго порядка.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда исследуемый временной ряд сгенерирован системой с запаздыванием первого порядка (4) с квадратичной нелинейной функцией и параметрами  $\tau_1 = 1000$ ,  $\lambda = 1.95$ ,  $\varepsilon_1 = 25$ . При реконструкции модельного уравнения в предположении, что оно имеет вид (4), получаем следующие результаты. График  $N(\tau)$  при шаге изменения  $\tau$ , равном 10, демонстрирует минимум при  $\tau'_1 = 1000$  (рис. 2, *a*). Минимум  $L(\hat{\varepsilon}_1)$  при  $\Delta\hat{\varepsilon}_1 = 1$  наблюдается при  $\varepsilon'_1 = 25$ , причем  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1) = 0.009$  (рис. 2, *b*). Восстановленная функция (рис. 2, *c*) очень хорошо совпадает с истинной нелинейной функцией системы.

Восстанавливая модельное уравнение системы в виде уравнения второго порядка (3), используем предложенный выше модифицированный метод определения времени запаздывания. Построенный с его помощью график  $N(\tau)$  дает оценку  $\tau'_1 = 990$  (рис. 2, *d*). При таком значении времени запаздывания график  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  имеет минимум при  $\varepsilon'_1 = 32$ ,  $\varepsilon'_2 = 335$ , причем  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = 0.047$  (рис. 2, *e*). Восстановленная при этих значениях параметров нелинейная функция приведена на рис. 2, *f*. Полученные результаты указывают на то, что модельное уравнение системы имеет первый порядок. Отметим, что в случае точного восстановления времени запаздывания  $\tau_1$  минимум  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$  наблюдается при  $\varepsilon'_1 = 25$ ,  $\varepsilon'_2 = 0$ , что тоже указывает на принадлежность системы к системам первого порядка. При этом  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1) = 0.009$ , а восстановленная нелинейная функция совпадает с изображенной на рис. 2, *c*.

4. Итак, нами предложена модификация метода определения времени задержки, основанного на статистическом анализе экстремумов временного ряда системы с запаздыванием. Модифицированный метод позволяет получить более точную оценку времени задержки по временному ряду в системах с запаздыванием высокого порядка. В результате повышается и качество реконструкции остальных параметров системы. Метод имеет высокое быстродействие и позволяет с хорошей точностью восстановить исследуемую систему при уровнях



**Рис. 2.** Восстановление системы с запаздыванием первого порядка: *a* — график  $N(\tau)$ , построенный по всем экстремумам временного ряда,  $N_{\min}(\tau) = N(1000)$ ; *b* — зависимость  $L(\hat{\varepsilon}_1)$ , нормированная на число точек временного ряда, при  $\tau_1' = 1000$ ,  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1) = L(25) = 0.009$ ; *c* — восстановленная нелинейная функция при  $\tau_1' = 1000$  и  $\varepsilon_1' = 25$ ; *d* — модифицированный график  $N(\tau)$ ,  $N_{\min}(\tau) = N(990)$ ; *e* — зависимость  $L(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ , нормированная на число точек временного ряда, при  $\tau_1' = 990$ ;  $L_{\min}(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2) = L(32, 335) = 0.047$ ; *f* — восстановленная нелинейная функция при  $\tau_1' = 990$ ,  $\varepsilon_1' = 32$ ,  $\varepsilon_2' = 335$ .

шума, достигающих 10%. Метод может быть также использован для определения по временному ряду априорно неизвестного порядка систем с запаздыванием.

## Список литературы

- [1] *Bünner M.J., Popp M., Meyer Th.* et al. // *Phys. Lett. A.* 1996. V. 211. P. 345–349.
- [2] *Tian Y.-C., Gao F.* // *Physica D.* 1997. V. 108. P. 113–118.
- [3] *Voss H., Kurths J.* // *Phys. Lett. A.* 1997. V. 234. P. 336–344.
- [4] *Караваев А.С., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. В. 10. С. 43–51.
- [5] *Udaltsov V.S., Goedgebuer J.-P., Larger L.* et al. // *Phys. Lett. A.* 2003. V. 308. P. 54–60.
- [6] *Bünner M.J., Meyer Th., Kittel A.* et al. // *Phys. Rev. E.* 1997. V. 56. P. 5083–5089.
- [7] *Hegger R., Bünner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 558–561.
- [8] *Bünner M.J., Ciofini M., Giaquinta A.* et al. // *Eur. Phys. J. D.* 2000. V. 10. P. 165–176.
- [9] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527.