09

Автопараметрическая система с хаотической динамикой

© Э.В. Кальянов

Институт радиотехники и электроники РАН (Фрязинский филиал)
E-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

Поступило в Редакцию 16 марта 2006 г.

Приведена математическая модель новой хаотической системы, основанной на модифицированном уравнении Ван-дер-Поля, в которой обеспечивается запаздывающее параметрическое самовоздействие. Численными методами проведен анализ хаотизации автоколебаний.

PACS: 05.45.-a

В настоящее время большое внимание уделяется системам с хаотической динамикой. Их исследование способствует развитию новых представлений в теории нелинейных колебаний [1,2]. Модели с хаотическим поведением находят применение в различных областях науки и техники [3–5]. Возбуждение хаотических колебаний реализуется, как известно [6–8], также при параметрическом воздействии на автоколебательные системы со сложной динамикой. Возможно и параметрическое преобразование гармонических колебаний в хаотические с помощью неавтоколебательных нелинейных систем [9].

Представляется интересным создание хаотических систем при использовании эффекта „автопараметрического“ воздействия, когда на параметры автоколебательной системы с целью хаотизации автоколебаний воздействует собственный сигнал. Уравнение Ван-дер-Поля является наиболее простой и наглядной основой для создания такой автопараметрической модели.

В данной работе рассматривается создание автопараметрической системы с хаотической динамикой на основе трехмерной модификации автономного уравнения Ван-дер-Поля, дополненного нелинейной возвращающей силой [10]. При этом параметрическое „самовоздействие“ осуществляется путем введения задержанного во времени собственного сигнала.

Уравнения рассматриваемой системы в переменных x, y, z имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(1 - z)y - (1 + \alpha x_\tau)x - \beta x^3, \tag{1}$$
$$\frac{dz}{dt} = (x^2 - z)/\sigma,$$

где $x_\tau = x(t - \tau)$, τ — время задержки сигнала. Коэффициенты ε, α, β и σ (положительные величины) определяют соответственно превышение над порогом генерации, уровень сигнала самовоздействия, нелинейную возвращающую силу и инерционность. При $\alpha = \beta = 0$ система (1) преобразуется в трехмерную модификацию уравнения Ван-дер-Поля без нелинейной возвращающей силы [11], а при $\alpha = \beta = \sigma = 0$ — в его классическую форму [1,2].

Предположение о возможности хаотизации колебаний в системе, описываемой уравнениями (1), основано на том, что хаос возникает даже в осцилляторе с нелинейной возвращающей силой, если параметрически осуществляется изменение собственной частоты нелинейного контура [9]. При этом реализуется преобразование гармонических колебаний в хаотические. В системе (1) в отличие от осциллятора роль внешнего сигнала, причем негармонического, выполняют задержанные колебания. При достаточно большой задержке они воздействуют как внешние. Численный анализ подтверждает это.

Приведенные результаты получены при расчетах методом Рунге–Кутта четвертого порядка при шаге интегрирования по времени 0.01. Начальные условия для всех переменных равны 0.1. Заданы следующие значения неизменяемых параметров: $\varepsilon = \beta = 1$, $\sigma = 0.1$, $\tau = 6$.

Численный анализ автоколебательной системы, описываемой уравнениями (1), показал, что хаотизация колебаний реализуется в широких пределах изменения параметра α, когда без самовоздействия (при $\alpha = 0$) при выбранных величинах остальных параметров $(\varepsilon, \beta, \sigma)$ существуют лишь регулярные движения. Расчет бифуркационных диаграмм показывает, что при адиабатическом увеличении параметра α хаотизация автоколебаний возникает, когда $\alpha > 2.45$. При адиабатическом уменьшении параметра α его бифуркационное значение перехода от

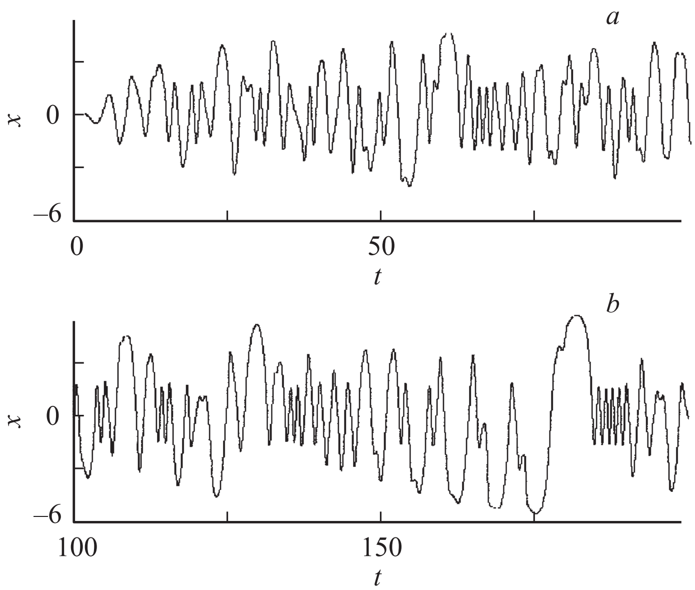

Рис. 1. Фрагменты реализаций колебательного процесса $x(t)$ в интервалы времени $t \in [0{,}100]$ (a) и $t \in [100{,}200]$ (b) при $\varepsilon = \beta = 1$, $\alpha = \tau = 6$.

хаоса к регулярному режиму несколько снижается (затягивается) — проявляется гистерезис.

Хаотические колебания отображают перемежаемость движений. Это иллюстрируется фрагментами реализаций, показанными на рис. 1, которые рассчитаны в различных интервалах времени. Условно можно выделить цуги „низкочастотных“ и „высокочастотных“ хаотических колебаний. Они чередуются нерегулярным образом. При этом частота низкочастотных колебаний изменяется в широких пределах. Возбуждение колебаний начинается на низких частотах.

На рис. $2, a$ приведен аттрактор, соответствующий реализации, показанной на рис. $1, b$. Он рассчитан в интервале времени $t \in [100{,}200]$. На рис. $2, b$ показаны спектры мощности S, полученные при $\alpha = 6$ (кривая *1*) и для сравнения при $\alpha = 0$ (кривая *2*). Аттрактор свидетельствует о сложном перемешивании фазовых траекторий. В соответствии с третьим уравнением системы (1) эти траектории рас-

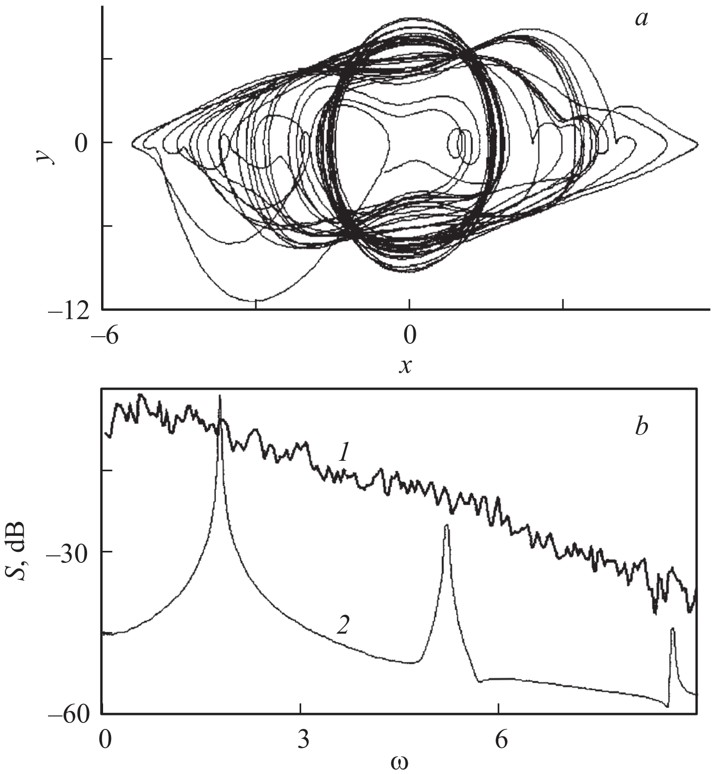

Рис. 2. Аттрактор при $\alpha = 6$ (a) и спектры мощности (b) при $\alpha = 6$ (*1*) и при $\alpha = 0$ (*2*).

полагаются на параболической поверхности. Структура аттрактора в проекции на полупространство $\{x, y\}$ практически такая же, как и в случае [12], наблюдавшемся в ангармоническом осцилляторе при параметрическом преобразовании гармонических колебаний в хаотические. Это свидетельствует о том, что механизм автопараметрической хаотизации колебаний близок к механизму, реализующемуся в [9,12] при параметрической накачке. В то же время система, описываемая уравнениями (1), принципиально отличается от рассмотренной в [9,12], так как является не преобразующей, а автоколебательной и к тому же может иметь бесконечное число степеней свободы. Спектр мощности, отображаемой кривой *1*, является непрерывным и занимает широкую полосу частот. При этом отсутствуют резкие перепады спектральной плотности мощности хаотических колебаний. Это делает перспективным использование рассмотренной системы для целей шифрования информации новым методом [13], основанным на использовании систем с хаотическим поведением.

Следует отметить, что хаотизация колебаний рассмотренной системы является возможной при различных значениях параметра инерционности, в том числе и при $\sigma = 0$. В этом случае при адиабатическом увеличении параметра параметрической запаздывающей обратной связи хаотизация колебаний возникает (при тех же значениях параметров $\varepsilon, \beta, \sigma$) при достижении величины $\alpha = 0.38$. При этом структура колебаний не претерпевает существенных изменений, хотя аттрактор уже не располагается на параболической поверхности. Это свидетельствует, в свою очередь, о том, что применение рассмотренного метода хаотизации колебаний может оказаться эффективным и для других систем. В связи с этим целесообразно расширение исследования круга систем, управляемых предложенным способом.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 04-02-16536).

Список литературы

[1] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
[2] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456 с.
[3] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 252 с.
[4] *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: ритмы жизни / Пер. с англ. М.: Мир. 1991. 248 с.
[5] *Кольцова Э.М., Третьяков Ю.Д., Гордеев Л.С.* и др. Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии. М.: Химия, 2001. 408 с.
[6] *Калинин В.И., Залогин Н.Н., Мясин Е.А.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. В. 21. С. 1311–1314.
[7] *Кальянов Э.В., Старков С.О.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. В. 11. С. 55–59.
[8] *Кальянов Э.В., Калинин В.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 13. С. 30–35.

[9] *Афраймович В.С., Рабинович М.И., Угодников А.Д.* // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 38. В. 2. С. 64–67.
[10] *Кальянов Э.В.* // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 10. С. 1238–1246.
[11] *Романовский Ю.М., Степанов Н.В., Чернавский Д.С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
[12] *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. № 9. С. 1050–1060.
[13] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С. 45–50.