09

Исследование эффектов модуляции в нестационарной динамике на основе двойного вейвлет-анализа

© *А.Н. Павлов, О.Н. Павлова*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: pavlov@chaos.ssu.runnet.ru

Поступило в Редакцию 3 мая 2006 г.

Предлагается метод исследования особенностей взаимодействия ритмов в нестационарной динамике систем с несколькими временны́ми масштабами, основанный на технике двойного вейвлет-анализа. На нескольких примерах иллюстрируются возможности данного метода для определения характеристик амплитудной и частотной модуляции сложных колебательных процессов.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Tp.

Многие процессы в природе являются нестационарными и демонстрируют сильные изменения во времени своих характеристик. Классические методы анализа структуры сигналов представляют собой инструменты исследования стационарных случайных процессов; их применение для обработки нестационарных данных зачастую приводит к различным проблемам в интерпретации полученных результатов. Например, появление двух пиков в спектре мощности с некратными частотами может соответствовать принципиально разным ситуациям: в динамике изучаемой системы могут одновременно присутствовать два независимых ритма, или может наблюдаться процесс переключения частоты, и в каждый момент времени удается зафиксировать только один ритмический процесс. Для обработки нестационарных экспериментальных данных применяются специальные методы, наиболее известным и популярным из которых является вейвлет-анализ [1–3]. В отличие от классического спектрального анализа он позволяет не только выявлять сам факт наличия характерных ритмов, но и дополнительно оценивать, как мгновенные частоты и амплитуды данных ритмов эволюционируют во времени.

Вейвлет-преобразование сигнала $x(t)$ вычисляется по формуле [4,5]:

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \tag{1}$$

где $W(a, b)$ — коэффициенты вейвлет-преобразования, a — масштаб наблюдения, b — параметр смещения, ψ — базисная функция (вейвлет). При проведении исследований ритмических компонент предпочитают использовать базисную функцию Морле:

$$\psi(\tau) = \pi^{-1/4} \exp(-j2\pi f_0 \tau) \exp\left[-\frac{\tau^2}{2}\right], \tag{2}$$

в которой параметр f_0 характеризует частотное разрешение, а связь параметра масштаба a с частотой анализируемого ритма f определяется соотношением $f = f_0/a$. Выделение временны́х зависимостей мгновенных частот и амплитуд характерных ритмов осуществляется путем поиска локальных максимумов коэффициентов $W(a, b)$ при каждом фиксированном значении параметра $b = b^*$.

Если в динамике некоторой системы одновременно присутствуют несколько независимых ритмов, то между ними возможны различные формы взаимодействия, в частности синхронизация колебаний [6]. Другим примером может служить модуляция амплитуды или частоты более быстрого ритма медленными процессами. Данное явление легко обнаружить, проводя анализ быстрой (модулируемой) динамики. На практике, однако, могут возникать сложности, если в эксперименте удается осуществлять регистрацию только одной медленной переменной состояния, в которой каким-то образом отражена быстрая динамика. Эта задача усложняется в условиях нестационарности ритмов, приводящей к изменению во времени частоты и глубины модуляции. Если эти характеристики демонстрируют сильные изменения, могут возникать сложности с разделением ритмических процессов из скалярного временно́го ряда на основе процедуры полосовой фильтрации. Полосу пропускания для быстрого ритма нельзя выбирать ни слишком узкой из-за нестационарности, ни слишком широкой, чтобы в нее не попали гармоники медленного ритма. Исследование ритмической динамики в такой ситуации целесообразно проводить с помощью вейвлет-анализа, базирующегося на преобразовании (1).

Для выявления особенностей амплитудной и частотной модуляции в условиях нестационарности предлагается специальный подход, основанный на технике двойного вейвлет-анализа [7,8]. Идея данного подхода состоит в том, чтобы использовать выделенные мгновенные частоты или амплитуды быстрых ритмов в качестве исходного сигнала для еще одного вейвлет-преобразования (1). Повторное преобразование позволяет извлекать информацию о всех процессах, принимающих участие в модуляции быстрой динамики медленными процессами.

Рассмотрим возможности предлагаемого подхода на нескольких примерах. В качестве первого примера выберем модель радиотехнического генератора хаотических колебаний (генератора с инерционной нелинейностью) [9]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx + y - xz - bx^3, \\ \dot{y} &= -x, \\ \dot{z} &= -gz + gx(x + |x|)/2. \end{aligned} \tag{3}$$

При изменении управляющих параметров системы (3) можно получить множество различных режимов, включая режим автомодуляции, который характеризуется сравнительно медленными колебаниями для переменной $z(t)$ и более быстрой динамикой для переменных $x(t)$ и $y(t)$. Для усложнения задачи рассмотрим нестационарную динамику модели (режим переходного хаоса, рис. 1, *a, b*). Исследование структуры сигнала $z(t)$ на основе двойного вейвлет-анализа позволяет по медленной переменной состояния определить мгновенную частоту и амплитуду быстрого ритма (после первого преобразования) (рис. 1, *c*), а затем, на втором этапе — мгновенную частоту амплитудной и частотной модуляции. Как видно из рис. 1, *d*, они практически совпадают с мгновенной частотой медленной динамики $z(t)$. Таким образом, можно говорить о том, что в условиях взаимодействия ритмов двойной вейвлет-анализ медленных фазовых переменных позволяет извлекать информацию о характеристиках модуляции и их изменениях во времени.

Для тестирования применимости техники двойного вейвлет-анализа в условиях сложной нестационарной динамики с большим количеством ритмических компонент рассмотрим пример колебательных процессов в функционировании объектов живой природы, например динамики

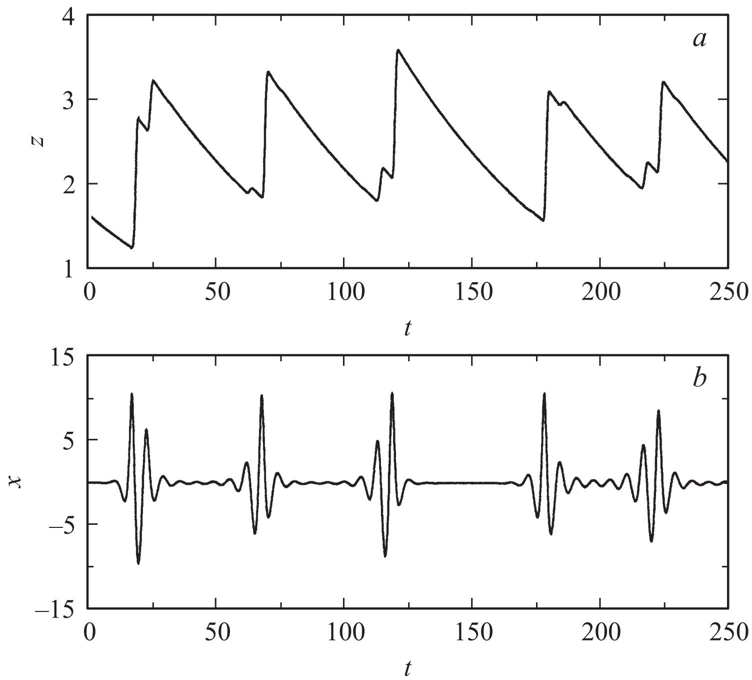

Рис. 1. *a, b* — временны́е зависимости переменных $z(t)$ и $x(t)$ в модели (3) в режиме автомодуляции ($k = 2.90328$, $g = 0.012505$, $b = 5 \cdot 10^{-5}$); *c* — мгновенная частота быстрого ритма, выделенная на основе вейвлет-преобразования сигнала $z(t)$; *d* — временны́е зависимости мгновенной частоты медленного ритма (кружочки), а также мгновенных частот амплитудной (звездочки) и частотной модуляции (треугольники) быстрого ритма в модели (3). Все зависимости получены на основе вейвлет-анализа переменной $z(t)$, причем последние две зависимости получены в результате двойного вейвлет-анализа.

нефрона (структурного элемента почек). Экспериментальные исследования последних лет, проведенные на крысах, показали, что в динамике нефронов присутствуют, по крайней мере, 3 независимых ритма, взаимодействующие между собой: сравнительно быстрая динамика (5–10 s), медленный ритм (30–40 s) и очень медленный ритмический процесс (100–200 s). Соответствующие колебательные процессы являются регу-

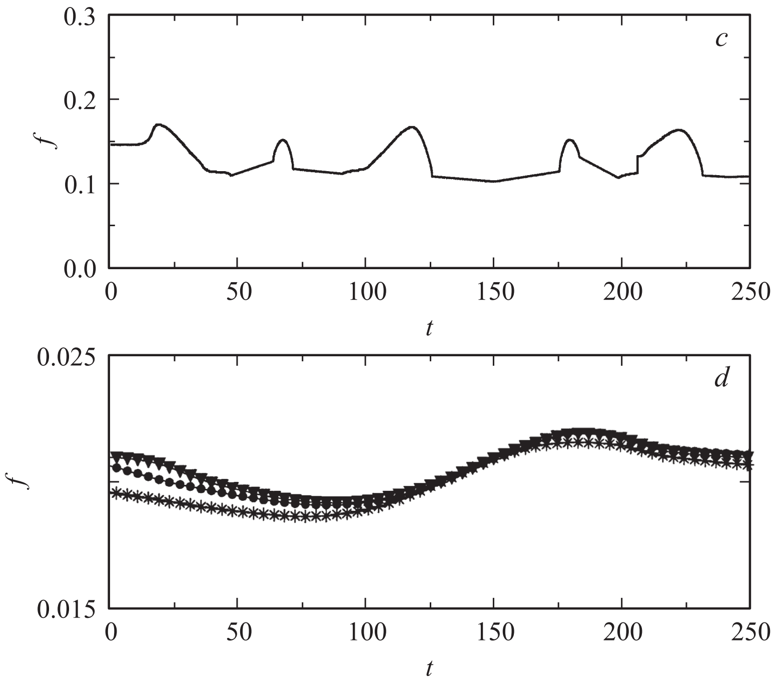

Рис. 1 (*продолжение*).

лярными при нормальном артериальном давлении и сильно нерегулярными при повышенном (рис. 2, *a, b*). Экспериментально наблюдаемая динамика является очень сложной в последнем случае — характеристики анализируемого процесса претерпевают сильные изменения во времени, поэтому рассмотрение данного примера может являться хорошим тестом на эффективность техники двойного вейвлет-анализа. Проведенные исследования сравнительно большой базы экспериментальных данных (около 80 экспериментов) показали, что взаимодействие между 3 ритмами существенно отличается от случаев нормального и повышенного артериального давления. Во втором случае наблюдается более сильное взаимодействие ритмов, приводящее к увеличению глубины амплитудной и частотной модуляции. Таким образом, изменения режимов функционирования живых систем могут описываться с помощью

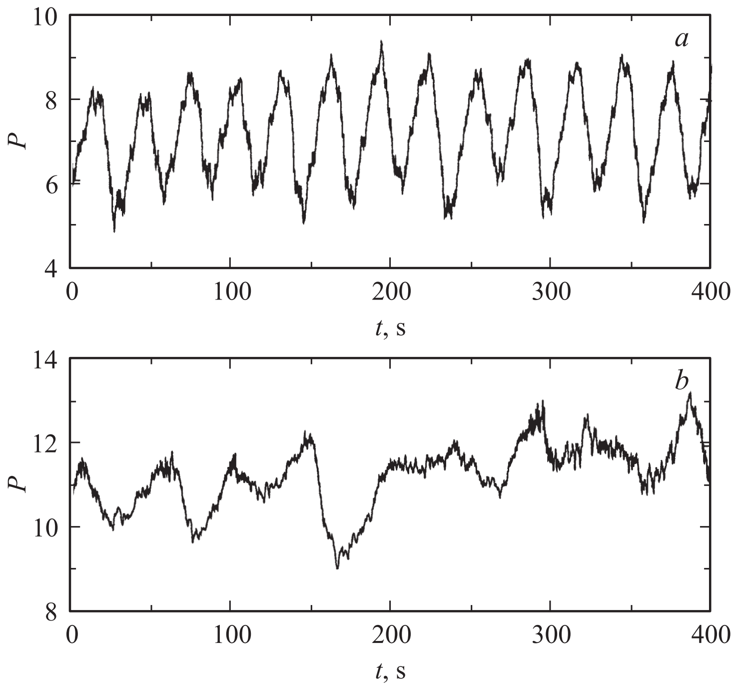

Рис. 2. a, b — примеры экспериментальной динамики нефронов, соответствующие случаю нормального и повышенного артериального давления; c — значения глубины амплитудной (m_a) и частотной (m_f) модуляции медленного ритма (30–40 s) очень медленными ритмическими процессами (100–200 s); d — соответствующие значения для модуляции быстрой динамики (5–10 s) медленным ритмом (30–40 s). В случае повышенного артериального давления глубина модуляции значительно возрастает.

характеристрик модуляции колебательных процессов, т.е. в терминах, более привычных для радиофизики.

Выбранный пример функционирования объектов живой природы обусловлен сложностью соответствующих процессов. Исследование возможностей двойного вейвлет-анализа было проведено нами на целом ряде других примеров, включая классические для радиотехники примеры амплитудной и частотной модуляции, которые можно смоделировать

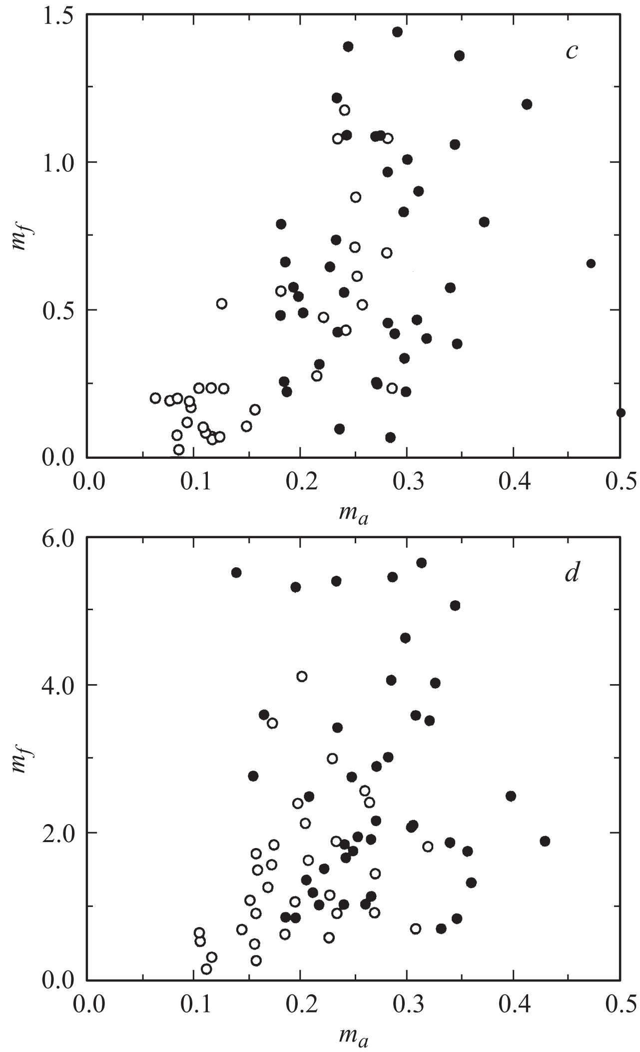

Рис. 2 (*продолжение*).

с помощью двух гармонических функций, модели генераторов периодических колебаний с внешним воздействием и т.д., в том числе при искусственно вводимой нестационарности. Данные тестовые примеры позволили убедиться в соответствии результатов, получаемых на основе двойного вейвлет-анализа, ожидаемым результатам. В частности, на примере генератора (3), сравнивая количественные значения глубины модуляции, вычисленные по переменной $z(t)$ с характеристиками, которые можно оценить по переменной $x(t)$, полагавшейся неизвестной при проведении двойного вейвлет-анализа, мы убедились в их количественном совпадении. Мы полагаем, что данный метод может служить в качестве нового инструмента исследования эффектов нелинейного взаимодействия ритмов в нестационарной динамике процессов любой природы. Этот инструмент может применяться для изучения взаимодействия 3 (а возможно, и более) ритмических компонент как в радиотехнических системах, так и при рассмотрении самых разных приложений радиофизических методов.

Авторы выражают благодарность О.В. Сосновцевой и E. Mosekilde за многочисленные дискуссии и предоставленные экспериментальные данные.

Проводимые исследования были поддержаны Министерством образования и науки РФ по программе „Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 гг.)“, грантами CRDF (Y1-P-06-06) и РФФИ 04-02-16769.

Список литературы

[1] *Grossmann A., Morlet J.* // S.I.A.M. J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 723–736.
[2] *Daubechies I.* Ten lectures on Wavelets. Phyladelphie, S.I.A.M., 1992.
[3] *Meyer Y.* Wavelets: Algorithms and Applications. Philadelphie, S.I.A.M., 1993.
[4] *Chui C.K.* Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Analysis. Phyladelphie, S.I.A.M., 1997.
[5] *Mallat S.G.* A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, Academic Press, 1998.
[6] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge Nonlinear Science. Ser. 12. Cambridge University Press, 2001.

[7] *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.-H., Marsh D.J.* // Phys. Rev. E. 2004. V. 70. P. 031915(8).
[8] *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Brazhe N.A., Brazhe A.R., Erokhova L.A., Maksimov G.V., Mosekilde E.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 218103(4).
[9] *Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Neiman A.B., Vadivasova T.E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.