01;03

Бездисперсионное распространение волн конечной амплитуды по поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле

© *Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева*

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 10 апреля 2006 г.

Рассмотрена эволюция волн конечной амплитуды на свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости в сильном тангенциальном электрическом поле. Показано, что в случае значительной диэлектрической проницаемости среды нелинейные волны произвольной конфигурации могут распространяться без искажений.

PACS: 47.65.-d, 47.35.-i, 52.35.Mw

Как известно [1], тангенциальное электрическое поле, в отличие от нормального поля, оказывает стабилизирующее влияние на свободную поверхность диэлектрической жидкости. Дисперсионное соотношение для поверхностных волн, распространяющихся вдоль поля в случае бесконечно глубокого слоя жидкости, имеет следующий вид [2,3]:

$$\omega^2 = gk + \frac{E^2\beta(\varepsilon)}{4\pi\rho}\,k^2 + \frac{\alpha}{\rho}\,k^3,$$

где k — волновое число, ω — частота, g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, E — напряженность внешнего электрического поля, $\beta = (\varepsilon - 1)^2/(\varepsilon + 1)$, а ε — диэлектрическая проницаемость среды. Из него видно, что при достаточно больших значениях напряженности поля

$E^2 \gg \beta^{-1}\sqrt{g\alpha\rho}$ распространение волн с числами k в интервале

$$\rho g E^{-2}\beta^{-1} \ll k \ll \beta E^2 \alpha^{-1}$$

будет описываться линейным волновым уравнением, т. е. будет бездисперсионным: $\omega \propto k$. Для волнового уравнения

$$\eta_{tt} = C^2 \eta_{xx} \tag{1}$$

(η — возмущение поверхности, $C = E\sqrt{\beta/(4\pi\rho)}$ — скорость его распространения) инварианты Римана без искажений распространяются вдоль прямых параллельных характеристик, что соответствует решению Даламбера:

$$\eta(x, t) = \eta^{(+)}(x + Ct) + \eta^{(-)}(x - Ct).$$

Проблема учета нелинейности, возникающая при рассмотрении волн конечной амплитуды, сводится к изучению того, каким образом инварианты Римана $\eta^{(\pm)}$ будут эволюционировать под ее воздействием. Как правило, нелинейность определяет тенденцию к формированию различного рода особенностей в профиле волны [4]. В недавней работе [5], где с учетом квадратичных нелинейностей анализировались волны малой амплитуды на поверхности жидкого диэлектрика, было обнаружено, что для жидкостей с достаточно большими ε возникает нетипичная ситуация. Инварианты Римана (по отдельности) распространяются вдоль соответствующих характеристик без изменений, как и в отсутствие нелинейности. В настоящей работе мы продемонстрируем, что это замечательное свойство обобщается и на волны произвольной амплитуды.

Итак, рассмотрим потенциальное движение идеальной жидкости бесконечной глубины во внешнем однородном тангенциальном электрическом поле. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z = 0$ (ось z декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности жидкости). Будем считать, что вектор напряженности поля направлен по оси x, а функция $\eta(x, t)$ задает отклонение границы от плоской, т. е. занимаемая жидкостью область ограничена свободной поверхностью $z = \eta$.

Потенциал скорости ϕ для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0$$

со следующими условиями на границе и на бесконечности:

$$\phi_t + (\nabla\phi)^2/2 = P_E/\rho, \quad z = \eta, \quad \phi \to 0, \quad z \to -\infty,$$

где P_E — электростатическое давление. Временна́я эволюция свободной поверхности задается кинематическим соотношением

$$\eta_t = \phi_z - \eta_x\phi_x, \qquad z = \eta.$$

Входящая в нестационарное уравнения Бернулли величина P_E определяется следующим выражением [6]:

$$P_E = \frac{(\varepsilon - 1)(\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi' - E^2)}{8\pi}, \quad z = \eta,$$

где потенциалы поля в жидкости и над ней соответственно φ и φ', удовлетворяют уравнениям Лапласа, которые следует решать совместно с условиями однородности поля на бесконечном удалении от поверхности, а также условиями непрерывности потенциала и нормальной компоненты вектора электрической индукции на границе диэлектрика.

В случае жидкости со значительной проницаемостью $\varepsilon \gg 1$ (к примеру, для этилового спирта $\varepsilon \approx 26$, для нитробензола $\varepsilon \approx 36$, для воды $\varepsilon \approx 81$) нормальная компонента электрического поля в жидкости оказывается много меньше по абсолютному значению тангенциальной компоненты — силовые линии поля направлены по касательной к искривленной границе. Как следствие, электростатическое давление будет определяться только потенциалом φ:

$$P_E \approx \frac{\varepsilon}{8\pi}\left((\nabla\varphi)^2 - E^2\right).$$

Уравнение Лапласа для нахождения распределения потенциала в жидкости

$$\nabla^2\varphi = 0$$

следует решать со следующими условиями:

$$\varphi \to -Ex, \qquad z \to -\infty,$$

$$\partial_n\varphi \approx 0, \qquad z = \eta,$$

где ∂_n — производная в направлении нормали к поверхности $z = \eta$.

Уравнения, описывающие геометрию прогрессивной волны (волны, профиль которой не меняется в движущейся с волной системе координат) получаются из приведенных уравнений движения при помощи следующих подстановок:

$$\varphi(x,z,t)=\varphi'(x',z)-Ect,\quad \phi(x,z,t)=\phi'(x',z)+cx',$$
$$\eta(x,t)=\eta'(x'),\qquad x=x'+ct,$$

где постоянная c имеет смысл скорости движения волны вдоль направления оси x, т.е. направления вектора напряженности внешнего электрического поля. Они имеют следующий вид:

$$\phi'_{x'x'}+\phi'_{zz}=0,\qquad \varphi'_{x'x'}+\varphi'_{zz}=0, \tag{2}$$
$$\phi'\to cx',\quad \varphi'\to -Ex',\quad z\to-\infty, \tag{3}$$
$$\partial_n\phi'=0,\quad \partial_n\varphi'=0,\quad z=\eta', \tag{4}$$
$$\frac{\phi'^2_{x'}+\phi'^2_{z}-c^2}{2}=\frac{\phi'^2_{x'}+\phi'^2_{z}-E^2}{8\pi\rho/\varepsilon},\quad z=\eta'. \tag{5}$$

Видно, что уравнения (2)–(4) для потенциалов скорости ϕ' и поля φ' совпадают с точностью до констант. Как следствие, между этими потенциалами существует функциональная связь:

$$\phi'/c=\varphi'/E.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (5), определяющее форму волны, получим:

$$\left(\phi'^2_{x'}+\phi'^2_{z}\right)\left[\frac{\varepsilon E^2}{8\pi\rho c^2}-\frac{1}{2}\right]=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi\rho}-\frac{c^2}{2}.$$

Несложно заметить, что это выражение превращается в тождество при $c=\pm C\equiv E\sqrt{\varepsilon/(4\pi\rho)}$ (при $\varepsilon\to\infty$ будет $\beta\to\varepsilon$). Это означает, что профиль прогрессивной волны произволен. Скорость ее распространения вдоль оси x не зависит от ее геометрии и по абсолютному значению равна C. Это аналогично поведению волн в рамках простейших линейных уравнений

$$\eta_t=\pm C\eta_x,$$

к которым редуцируется волновое уравнение (1) при отдельном рассмотрении распространяющихся по направлению (верхний знак) и против направления (нижний знак) оси x волн.

Таким образом, нелинейность не приводит к искажению профиля волн произвольной геометрии, что обеспечивает их структурную устойчивость. Это, впрочем, не означает, что влиянием нелинейности можно пренебречь вовсе. Нелинейность будет определять взаимодействие противоположно направленных волн.

Данная работа выполнена в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН, при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

Список литературы

[1] *Melcher J.R.* Field-Coupled Surface Waves. MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
[2] *Melcher J.R.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 1348.
[3] *Шлиомис М.И.* // УФН. 1974. Т. 112. В. 3. С. 427.
[4] *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.
[5] *Zubarev N.M.* // Phys. Lett. A. 2004. V. 333. P. 284.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.