

09

О возможности реализации квазипериодических режимов при переходе к неустойчивой по Лагранжу динамике

© А.П. Кузнецов, А.В. Савин

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники РАН
E-mail: alkuz@sgu.ru

Поступило в Редакцию 9 марта 2006 г.

На примере модельного двумерного отображения изучено явление возникновения в пространстве параметров динамических систем узкой полосы квазипериодических движений на границе между областями периодической и неустойчивой по Лагранжу динамики. Показано, что быстрое разрушение квазипериодического режима происходит в результате нелокальной бифуркации касания аттрактора и устойчивого многообразия неподвижной седловой точки.

PACS: 05.45.-a

Как хорошо известно, динамика многих нелинейных систем является устойчивой по Лагранжу (т.е. сосредоточенной в конечной области фазового пространства) не при всех значениях управляющих параметров. Соответственно в пространстве параметров существуют области устойчивой по Лагранжу динамики, характеризующейся наличием одного или нескольких аттракторов, и неустойчивой по Лагранжу динамики, характеризующейся отсутствием аттракторов. Наиболее часто переходу из одной области пространства параметров в другую соответствует седло-узловая бифуркация (см., например, [1]), при которой аттрактор (как правило, предельный цикл) сливается с соответствующим репеллером (либо седловым множеством) и исчезает. При отсутствии в фазовом пространстве других аттракторов динамика системы становится неустойчивой по Лагранжу.

В настоящей работе мы обращаем внимание на то, что в пространстве параметров некоторых систем на границе областей периодической и неустойчивой по Лагранжу динамики обнаруживается область, в

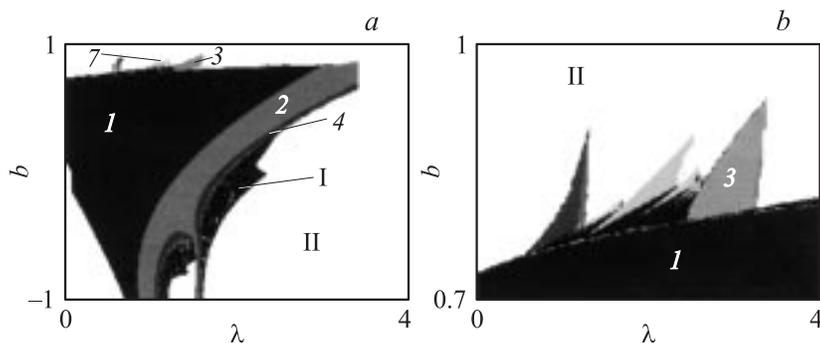


Рис. 1. Общее устройство пространства параметров системы (1) при $\varepsilon = -0.5$, $\mu = 0.5$ (a) и область квазипериодических движений в увеличенном виде (b). Области устойчивости циклов различных периодов отмечены разными оттенками серого; цифры на рисунках соответствуют периодам циклов, реализующихся в соответствующих областях. Черным цветом (I) отмечены области квазипериодических и хаотических движений; белым (II) — области неустойчивой по Лагранжу динамики.

которой поведение системы является квазипериодическим. Эта область имеет весьма малый размер, при этом в нее тем не менее встроена классическая система языков синхронизации. Очевидно, что в этом случае потеря устойчивости периодического режима происходит не через седло-узловую бифуркацию, а через бифуркацию Неймарка, однако образовавшийся квазипериодический режим быстро разрушается. Исследование механизма этого разрушения и являлось целью нашей работы.

По-видимому, наиболее простой системой, демонстрирующей описанное устройство пространства параметров, является обобщенное отображение Эно:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 + b y_n + \varepsilon x_n y_n + \mu x_n^3, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (1)$$

которое было предложено в [2] как отображение Пуанкаре простейшей потоковой системы, демонстрирующей петлю сепаратрисы седло-фокуса и гомоклиническую структуру. Устройство плоскости параметров отображения (1) приведено на рис. 1, представляющем собой построенную численно так называемую карту динамических режимов,

на которой различными оттенками серого цвета обозначены области разных периодических режимов и хаоса. Видно, что плоскость параметров исследуемой системы обладает описанными выше особенностями.

В интересующей нас области пространства параметров система (1) имеет три неподвижные точки, расположенные на прямой $y = x$, при этом две крайние являются седлами, а средняя — фокусом. В области квазипериодических режимов фокус неустойчив, а аттрактором является родившаяся из него инвариантная кривая либо резонансный цикл на ней (внутри языков синхронизации). При этом многообразия различных седловых точек могут пересекаться с образованием гетероклинической структуры либо не пересекаться, что, по-видимому, не влияет на процесс разрушения аттрактора. В случае гетероклинического касания аттрактор окружен обоими устойчивыми многообразиями, а по одной из ветвей каждого из неустойчивых многообразий приходит на него. В другом случае, приведенном на рис. 2, аттрактор окружен устойчивым многообразием только одной седловой точки.

Это многообразие определяет границу бассейна притяжения аттрактора, при этом только одна ветвь неустойчивого многообразия седловой точки приходит на аттрактор, а другая уходит на бесконечность (рис. 2, *a*). При движении по пространству параметров „в глубь“ области квазипериодической динамики, с одной стороны, увеличивается размер инвариантной кривой, а с другой стороны, структура устойчивого многообразия седловых точек усложняется и они смещаются в сторону аттрактора (рис. 2, *b, c*). Поэтому при сравнительно небольшом смещении в глубь области квазипериодических движений от линии бифуркации Неймарка происходит касание аттрактора и устойчивого многообразия седловой точки (рис. 2, *c*). В результате аттрактор теряет устойчивость и, поскольку других аттракторов в системе нет, ее динамика становится неустойчивой по Лагранжу.

Ситуация, реализующаяся сразу после касания, изображена на рис. 2, *d*. При соответствующих значениях параметров касание аттрактора и устойчивого многообразия уже произошло и динамика системы неустойчива по Лагранжу, однако на рис. 2, *d* устойчивое многообразие не проникает в область, ограниченную разрушившейся инвариантной кривой, поскольку траектория проводит очень большое (много большее времени наблюдения) время в окрестности разрушившегося аттрактора. Поэтому, хотя аттрактора уже не существует, области фазового пространства внутри и вне инвариантной кривой фактически остаются

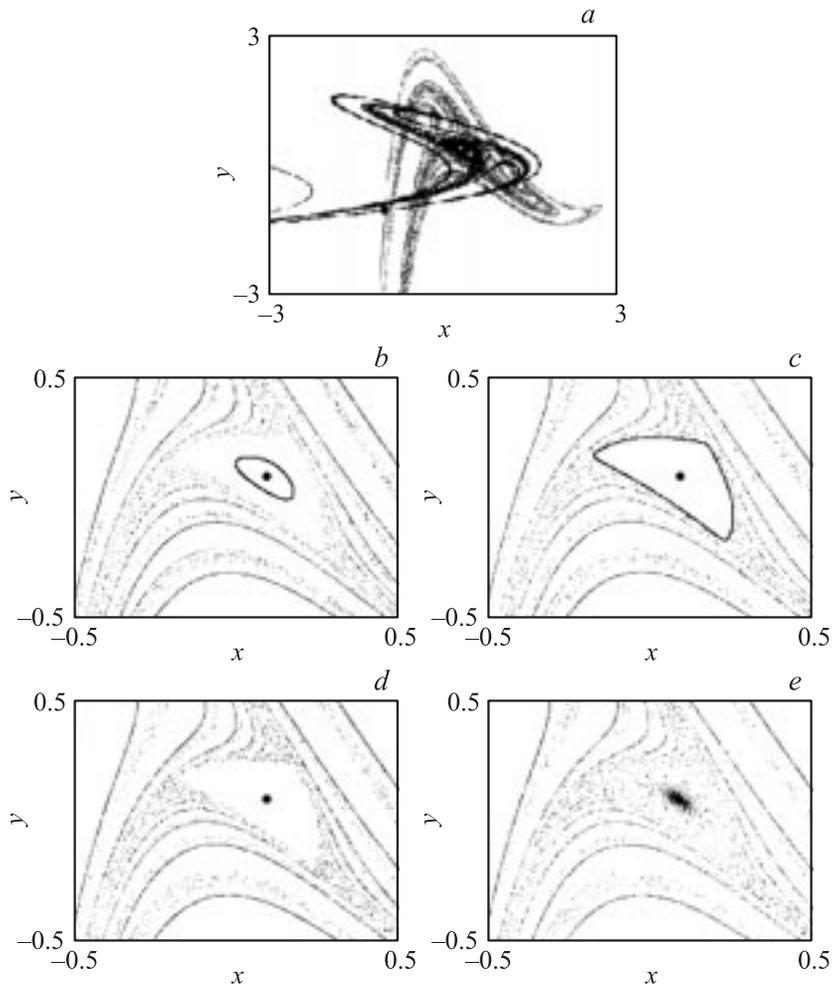


Рис. 2. *a* — взаимное расположение устойчивого (светлый цвет) и неустойчивого (темный цвет) многообразия седловой точки и аттрактора системы (1) при значениях параметров $b = 0.81$; $\lambda = 1.8$. *b-e* — эволюция устойчивого многообразия седловой точки при фиксированном параметре $\lambda = 1.8$ и изменении параметра b : $b = 0.810$ (*b*), $b = 0.8155$ (*c*), $b = 0.816$ (*d*), $b = 0.817$ (*e*). Неподвижные точки отмечены черными кружками, аттрактор (если он существует) — сплошной черной линией.

разделенными, так как точка может попасть из одной в другую лишь за очень большое время. Хотя при дальнейшем увеличении параметра b это время уменьшается и на рис. 2, e устойчивое многообразие уже соединяется с неустойчивым фокусом, интервал значения параметров, в которых наблюдается такая „промежуточная“ динамика, достаточно широк (в рассматриваемом случае от $b = 0.8155$ до $b = 0.8170$).

Таким образом, в системе (1) образовавшаяся в результате бифуркации Неймарка устойчивая инвариантная кривая (либо устойчивый цикл на ней) разрушается в результате нелокальной бифуркации касания с устойчивым многообразием расположенной рядом седловой точки. По-видимому, такой сценарий разрушения аттрактора является достаточно универсальным (см. в этом контексте работы [3,4]), поскольку устойчивые и седловые неподвижные точки образуются, как правило, парами в результате седло-узловой бифуркации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-02-16773).

Список литературы

- [1] *Thomson J.M., Stewart H.B.* Nonlinear dynamics and chaos. New York: Wiley and Sons, 1986.
- [2] *Gonchenko V.S., Kuznetsov Yu.A., Meijer H.G.E.* Preprint 1296. Dep. of Math., Utrecht University, 2004. P. 24.
<http://www.math.uu.nl/publications/preprints/1296.pdf>
- [3] *Кузнецов А.П., Тюрюкина Л.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. В. 8. С. 52–55.
- [4] *Кузнецов А.П., Савин А.В.* // Изв. вузов: Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11. В. 6. С. 16–31.