

09

## Метод обнаружения скрытой синхронизации

© Н.В. Золотова, Д.И. Понявин

Институт физики им. В.А. Фока  
Санкт-Петербургский государственный университет  
E-mail: ned@geo.phys.spbu.ru

Поступило в Редакцию 24 мая 2006 г.

Предлагается методика распознавания неустойчивой и отложенной во времени синхронизации. С этой целью применяются последовательно два графических метода: нелинейный рекуррентный анализ временных рядов и метод, основанный на преобразовании Хафа, для идентификации границ установления и потери связи между системами.

PACS: 05.45.Xt

Выявление и исследование синхронизации временных рядов, отражающих реальные процессы в природе, являются актуальными фундаментальными задачами. В результате рассмотрения идеальных связанных динамических систем, таких как системы Лоренца, Ресслера, генератора Ван-дер-Поля и других, удалось не только численно смоделировать параметры подстройки одной автоколебательной системы под другую, но и классифицировать синхронизацию по типам. Так, на сегодня различают фазовую, отложенную (лаг), полную, взаимную, синхронизацию внешним сигналом и другие [1–4]. Для анализа синхронизации вводятся соответствующие меры, функционалы, показатели: так, например, для определения фазы хаотического сигнала используется известное преобразование Гильберта [1,2].

В случае модельных систем исследователь заранее знает, по каким законам развиваются процессы. Здесь можно задать необходимый уровень шума, можно регулировать и подстраивать управляющие параметры, можно задать определенный тип синхронизации или отладить систему так, чтобы синхронизация происходила путем подавления хаоса [1]. Другими словами, при такой постановке задачи исследователь имеет дело с „активным экспериментом“ [1–4].

Однако в случае работы с реальными временными рядами исследователь не знает, наблюдается явление синхронизации или оно лишь близко к нему, можно говорить о связанных системах или только об одной сложной системе. Заранее неизвестно ни конечного числа динамических параметров, ни характера связи, более того, статистика может оказаться недостаточной для решения поставленной задачи. Например, знаменитый ряд чисел Вольфа, отражающий солнечную активность, имеет длину чуть более 300 лет, что строго говоря, не является достаточным для построения моделей. Впрочем, вышесказанное можно отнести к случаям, когда исследователь имеет дело с природными нестационарными явлениями, а процессы, их отражающие, являются „пассивными экспериментами“.

Более того, введение мер и характеристик для аналитического рассмотрения процессов требует, чтобы синхронизация поддерживалась довольно длительное время. В условиях реального эксперимента синхронизация может быть крайне неустойчивой.

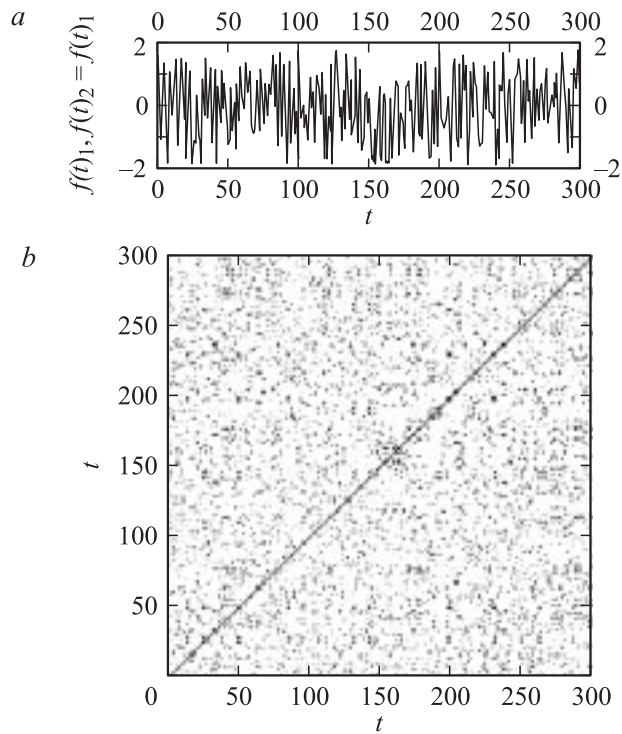
В данной работе предлагается методика распознавания начала и конца установления синхронизации процессов в общем случае, когда синхронизация может быть отложенной во времени или даже когда процессы обращены во времени. Мы использовали два графических метода: метод кросс-рекуррентного анализа и метод на основе преобразования Хафа.

Рекуррентный анализ был впервые предложен Экманом, Кампхорстом и Рюэлем [5] как графическая реализация на плоскости фундаментального свойства рекуррентности (повторяемости траектории динамической системы в фазовом пространстве). Рекуррентный график изображается в виде двумерной квадратной матрицы, заполненной нулями и единицами [6]:

$$\mathbf{R}_{i,j} = \Theta(\varepsilon_i - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

где  $N$  — число рассматриваемых состояний  $\mathbf{x}_i$ ,  $\varepsilon$  — граничное расстояние,  $\|\cdot\|$  — норма и  $\Theta(\cdot)$  — функция Хевисайда.

Если состояние системы в момент времени  $i$  рекуррентно другому ее состоянию в момент  $j$ , то значение элемента матрицы с координатами  $(i, j)$  равно единице, в противном случае — нулю. Графически единицы представлены черными точками, а нули белыми (рис. 1, *b*). По обеим осям рекуррентного графика откладывается время. Кросс-рекуррентный график предполагает работу уже не с одним временным



**Рис. 1.** К выявлению синхронизации временных рядов  $f(t)_1$  и  $f(t)_2$ :  
*a* — графики для нормально распределенных шумов  $f(t)_1$  (черная кривая) и  $f(t)_1 = f(t)_2$  (серая кривая);  
*b* — кросс-рекуррентный график для  $f(t)_1$  и  $f(t)_2$ ;  
*c* — параметрическое пространство Хафа для кросс-рекуррентного паттерна;  
*d* — линия синхронизации, восстановленная по методу [6], — серая кривая и линия синхронизации, восстановленная с использованием преобразования Хафа, — черная кривая.

рядом, а с двумя [6,7]. Наличие диагональных структур (в простейшем случае линий) на рекуррентном или кросс-рекуррентном графике свидетельствует о синхронной эволюции рассматриваемых процессов [6,8]. По определению  $\mathbf{R}_{i,i} = 1$ , таким образом, на рекуррентном графике всегда присутствует черная диагональ из левого нижнего угла в правый верхний, которая носит название — линия тождественности. Для кросс-

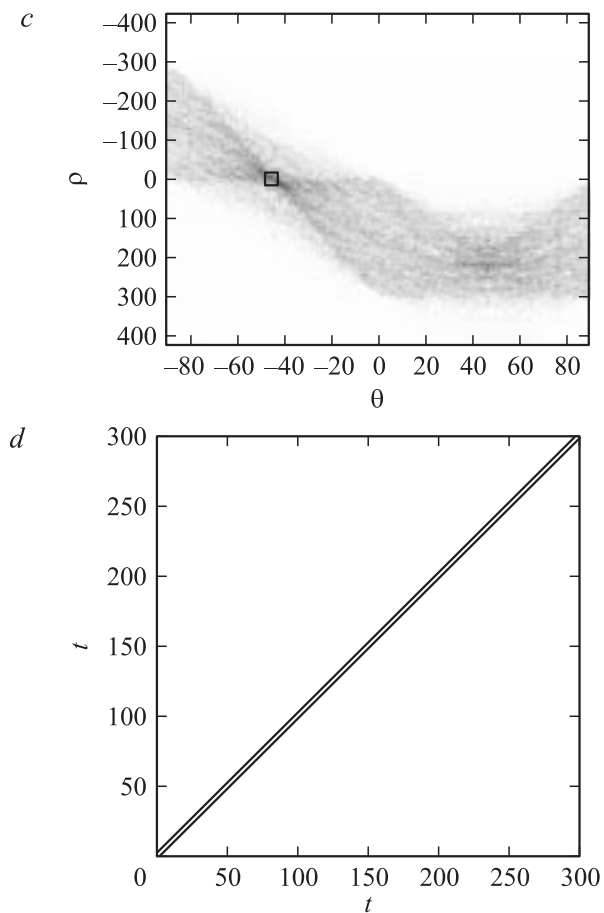
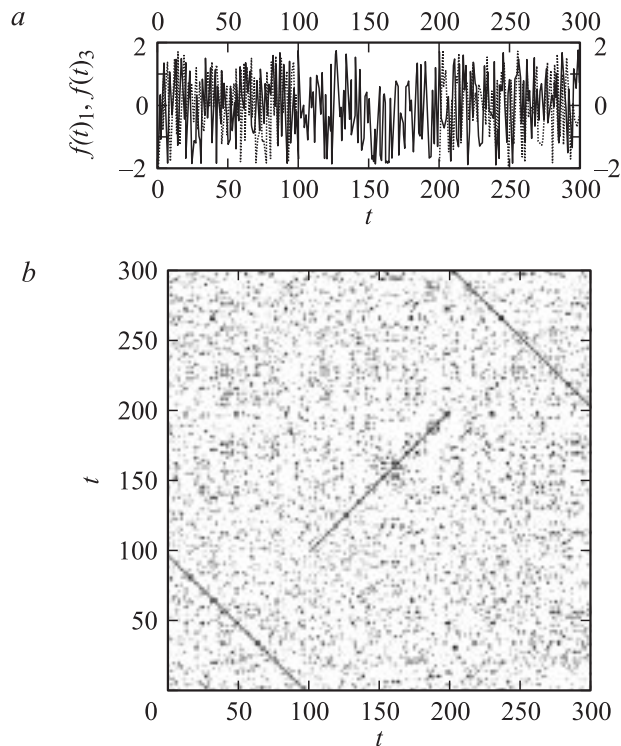


Рис. 1 (продолжение).

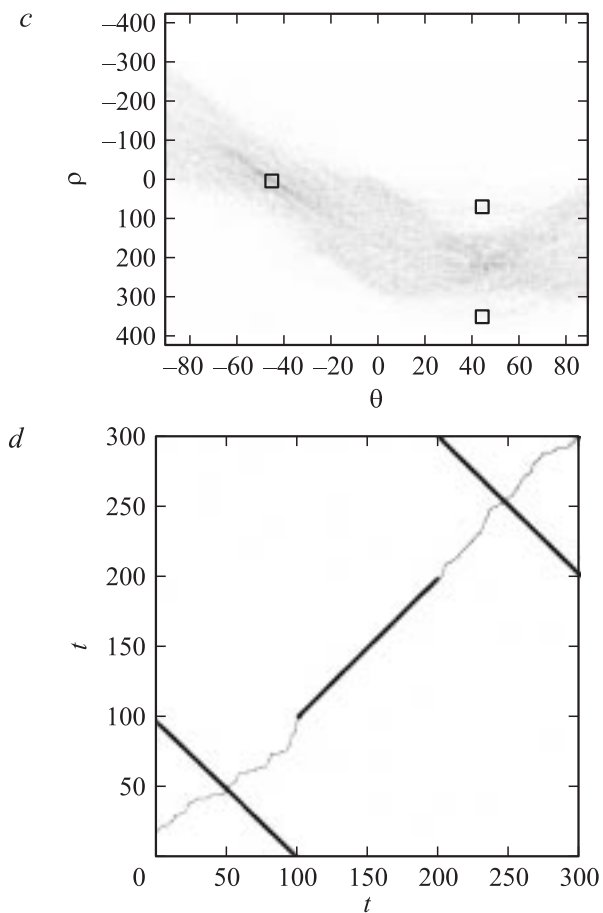
рекуррентного графика такая диагональ в общем случае может и вовсе не существовать. Здесь линия тождественности заменяется линиями синхронизации (рис. 1, *b*, 2, *b*, 3, *b*).

В нашей работе мы использовали пакет программ — Recurrence Plot Toolbox, разработанный Марваном (<http://www.agnld.uni-potsdam.de/~marwan/toolbox>). Этот пакет реализует построение линии синхронизации



**Рис. 2.** К выявлению синхронизации временных рядов  $f(t)_1$  и  $f(t)_3$ : *a* — графики для нормально распределенных шумов  $f(t)_1$  (черная кривая) и  $f(t)_3$  (серая кривая); *b* — кросс-рекуррентный график для  $f(t)_1$  и  $f(t)_3$ ; *c* — параметрическое пространство Хафа для кросс-рекуррентного паттерна; *d* — линия синхронизации, восстановленная по методу [6] (серая кривая), и прерывистая линия синхронизации, восстановленная с использованием преобразования Хафа (черная кривая).

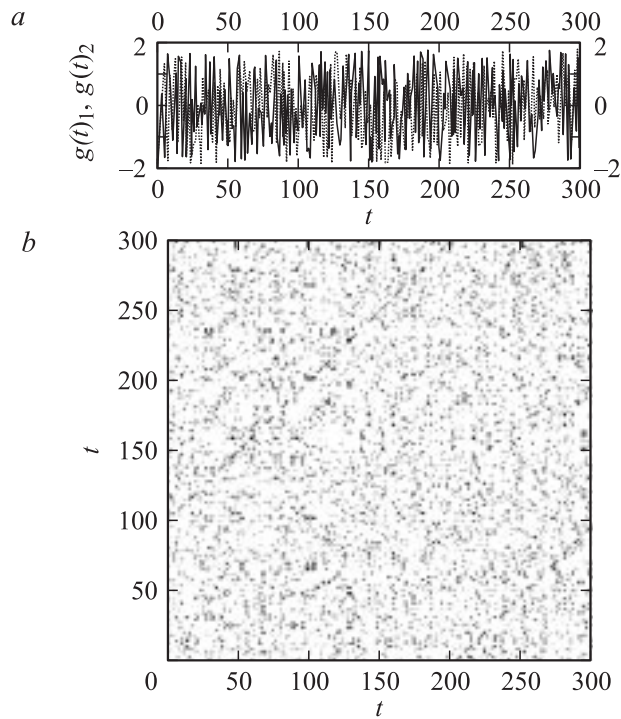
ции по плотности распределения точек вдоль основной диагонали, из нижнего левого в верхний правый угол. Данная методика применима для случаев, когда исследователь знает, что синхронизация имеет место и она непрерывна во времени. В реальном же эксперименте наблюдаемые могут отвечать реализациям двух сильно зашумленных процессов,



**Рис. 2** (продолжение).

непрерывная связь между ними может нарушаться, а синхронизация может оказаться эпизодической и неустойчивой.

Благодаря тому, что информация, полученная на основе кросс-рекуррентного анализа, может быть представлена в виде паттернов, стало возможным проанализировать полученные графические изображения посредством известного преобразования Хафа [9]. Посредством



**Рис. 3.** К выявлению синхронизации временных рядов  $g(t)_1$  и  $g(t)_2$ : *a* — графики для нормально распределенных шумов  $g(t)_1$  (черная кривая) и  $g(t)_2$  (серая кривая); *b* — кросс-рекуррентный график для  $g(t)_1$  и  $g(t)_2$ ; *c* — параметрическое пространство Хафа для кросс-рекуррентного паттерна; *d* — линия синхронизации, восстановленная по методу [6] (серая кривая), и прерывистая линия синхронизации, восстановленная с использованием преобразования Хафа (черная кривая).

преобразования Хафа координаты рассматриваемой системы (например, декартовы координаты  $x, y$ ) переписываются в виде новых переменных  $\theta$  и  $\rho$  (рис. 1, *c*, 2, *c*, 3, *c*). Методика может быть направлена как на нахождение прямых линий на изображении, так и на обнаружение более сложных структур, таких как окружности, эллипсы и прочие. Поскольку наличие именно прямых диагональных линий на кросс-рекуррентном

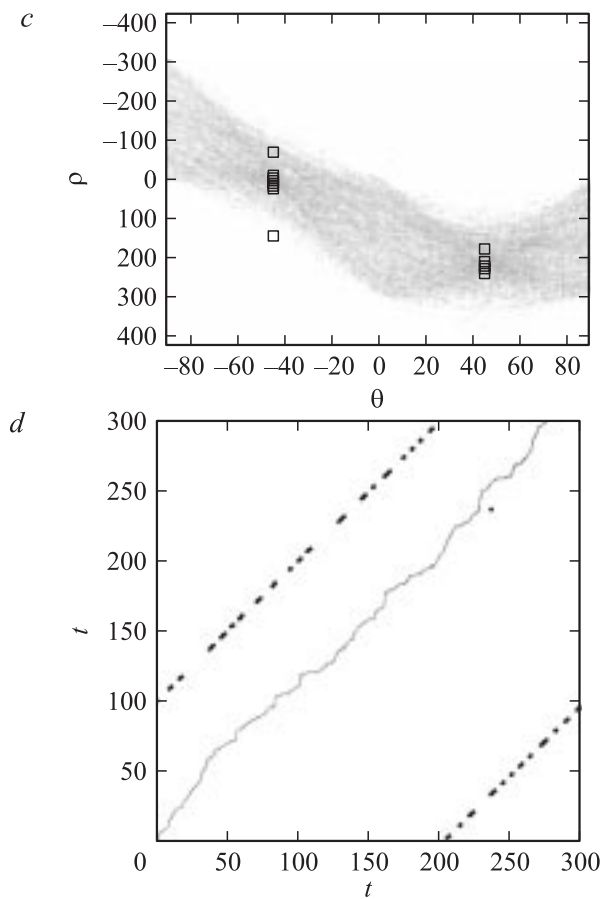


Рис. 3 (продолжение).

графике в простейшем случае отвечает за наличие синхронизации, то мы использовали преобразование Хафа, распознающее именно прямые линии  $\rho = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ . В таком параметрическом пространстве пересечение синусоид соответствует прямой линии в исходном  $x$ -пространстве, причем число пересекающихся в одном месте синусоид соответствует числу точек на линии.



Рассмотрим простейший случай синхронизации временных рядов  $f(t)_1$  и  $f(t)_2$  нормально распределенных шумов (рис. 1, *a*). Если  $f(t)_1 = f(t)_2$ , то это означает, что процессы идентичны [1]. На рис. 1, *b* представлен кросс-рекуррентный график для  $f(t)_1$  и  $f(t)_2$ . Этот и другие кросс-рекуррентные графики построены без использования вложенных размерностей ( $D = 1$ ), без запаздывания  $\tau = 1$ , с порогом  $\varepsilon = 0.1\sigma$  ( $\sigma$  — среднеквадратическое отклонение), рассчитанным по евклидовой норме. Сплошная черная линия из нижнего левого в правый верхний угол указывает на полную идентичность рядов. Рис. 1, *c* есть параметрическое пространство Хафа для данного кросс-рекуррентного графика с дискретизациями по  $\theta$  и  $\rho$  осям, равными единицам. Квадратом на нем выделена точка, соответствующая пересечению более чем 90 синусоид, что соответствует прямой линии кросс-рекуррентного графика вдоль главной диагонали. Эта линия восстанавливается (рис. 1, *d*) из параметрического пространства Хафа при условиях, что она распадается на отрезки, если расстояние между этими отрезками не превышает пробела в две точки, и минимальное скопление точек, которые будут рассматриваться как отрезок, равно трем. Таким образом, предлагаемая методика позволила выявить на данном примере полную синхронизацию временных рядов, а восстановленная линия синхронизации с использованием методики Хафа совпадает с линией синхронизации, построенной по методике [6,8] (рис. 1, *d*).

Теперь поставим условие на разрыв синхронизации, усложнив тест тем, что первая и последняя трети ряда  $f(t)_2$  зеркально обращены во времени. На рис. 2, *a* представлен исходный ряд  $f(t)_1$  и новый  $f(t)_2$ , а на рис. 2, *b* — кросс-рекуррентный график для них. Видно, что в тех местах, в которых наблюдается такая условно „зеркальная синхронизация“, диагональные линии поменяли свой угол наклона на  $90^\circ$  по отношению к средней части ряда, который мы оставили неизменным. На рис. 2, *c* изображены параметрические синусоиды Хафа, построенные при тех же параметрах, что и синусоиды на рис. 1, *c*. На нижнем рисунке видно, что линия синхронизации, построенная по методике Марвана (серая кривая), отвечает истинному положению дел только в средней трети графика. В то время как структуры, восстановленные с помощью преобразования Хафа, смогли точно выявить моменты, начиная с которых мы имеем дело с отраженным временным рядом (черные отрезки). Стоит подчеркнуть это достоинство использования совместно метода рекуррентного анализа и метода Хафа, которое

позволяет выявлять случаи, когда мы имеем дело с одним и тем же временным рядом, но обращенным во времени, заранее не зная об этом. Подобные задачи могут встречаться, например, в сейсмологии, акустике, когда исследователь работает с отраженной волной, при этом традиционные методы анализа, как, например, корреляционный, спектральный, вейвлет-анализ, могут приводить к серии ложных результатов.

Рассмотрим случай, когда синхронизация отложена во времени. Опять обратимся к нормально распределенным шумам —  $g(t)_1$  и  $g(t)_2$  (рис. 3, *a*). Причем пусть  $g(t)_1$  в свои первые 200 единиц времени  $t$  полностью синхронизован с  $g(t)_2$  в его последние 200 единиц времени, таким образом, лаг составляет  $100t$ . В дополнение  $g(t)_1$  в свои последние сто единиц времени синхронизован с  $g(t)_2$  в его первые 100 единиц времени, здесь лаг уже  $200t$ . Итого мы получили два интервала лаг синхронизации. Усложним задачу тем, что сделаем эти отрезки синхронизации разрывными в произвольных местах и с произвольными длинами разрывов, что делает неоправданным применение метода построения линии синхронизации Марвана для выявления подобного вида связи между временными рядами (рис. 3, *d*, серая кривая). Кросс-рекуррентный график для  $g(t)_1$  и  $g(t)_2$  уже не демонстрирует явной картины синхронизации (рис. 3, *b*), как было в двух предыдущих случаях. По этой причине мы понизили порог на количество синусоид, пересекающихся в одной точке, а значит, появление квадратов в параметрическом пространстве Хафа (рис. 3, *c*) уже не носит столь четкого характера, как на рис. 1, *c* и 2, *c*. На рис. 3, *d* видно, что черные короткие отрезки, отвечающие структуре, восстановленной по методике Хафа, смогли довольно точно определить тип синхронизации, связывающий  $g(t)_1$  и  $g(t)_2$ .

Итак, в настоящей работе показано, что в случае нестационарной синхронизации, которая может быть вызвана, например, прерывистым характером взаимодействия между системами, можно определять границы установления и потери такой связи с использованием совместно метода построения кросс-рекуррентных графиков и метода, основанного на преобразовании Хафа.

Такой подход может быть применен и к реальным экспериментальным временным рядам, когда исследователь не имеет доступа к параметрам и связям рассматриваемых систем.

## Список литературы

- [1] *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths Y.* Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2001.
- [2] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79 (7). С. 391.
- [3] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 3. С. 40.
- [4] *Romano M.C., Thiel M., Kurths J., Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Europhys. Lett. 2005. V. 71 (3). P. 466.
- [5] *Eckmann J.-P., Kamphorst O.S., Ruelle D.* // Europhys. Lett. 1987. V. 4 (9). P. 973.
- [6] *Marwan N., Thirl M., Nowaczyk N.R.* // Nonlin. Process Geophys. 2002. V. 9 (3/4). P. 325.
- [7] *Zbilut J.P., Giulian A., Webber Jr.C.L.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 246 (1–2). P. 122.
- [8] *Marwan N., Kurths J.* // Phys. Lett. A. 2005. V. 336. P. 349.
- [9] *Ching Y.-T.* // Pattern Recognition Lett. 2001. V. 22. P. 421.