01

О пропускной способности нелинейного классического канала

© Ю.Н. Зайко

Поволжская Академия государственной службы им. П.А. Столыпина, Саратов
E-mail: zyrnick@lycos.com

Поступило в Редакцию 2 июня 2006 г.

Исследована пропускная способность нелинейного классического канала передачи информации, для которого не выполняется известная формула Шеннона, полученная для линейного аддитивного канала. В соответствии с принципом Ландауэра передача бита информации не требует конечных затрат энергии, что, в принципе, позволяет осуществлять передачу информации обратимым образом. Для исследования процесса передачи информации в качестве модели передающей среды использован нелинейный диэлектрик с кристаллической решеткой, обладающей центром симметрии, что позволяет провести аналогию между процессом установки и передачи бита и нарушением симметрии решетки в результате фазового перехода 2-го рода при температуре Кюри. Для получения выражения для пропускной способности использовано известное кноидальное решение соответствующих нелинейных уравнений в отсутствие затухания. Получена также оценка пропускной способности произвольного нелинейного классического канала.

PACS: 05.60.-k

В 1961 г. Р. Ландауэр выдвинул положение [1], названное впоследствии принципом Ландауэра, согласно которому единственной операцией с битами информации, требующей минимальной затраты энергии $kT\ln 2/$ бит (k — постоянная Больцмана, T — температура), является стирание бита, а все остальные операции, включая копирование, установку и другие, могут выполняться со сколь угодно малыми энергетическими затратами, если скорость их протекания достаточна мала. Этот принцип (впоследствии строго обоснованный) сменил так называемый принцип Сцилларда–фон Неймана, согласно которому все без исключения операции с битами требуют указанных выше энергетических затрат.

В настоящее время принцип Ландауэра нашел применение в вычислениях, заложив основу так называемых обратимых вычислений и измерениях, позволив по-новому трактовать известные результаты [2].

В работе [3] Р. Ландауэр распространил эти идеи на процесс передачи информации. Настоящая работа посвящена развитию этих идей, хотя автор и не разделяет убеждения Р. Ландауэра, что это следует делать, перенося буквально методы, использованные в теории вычислений [1].

Прежде чем перейти к описанию использованной ниже модели для среды распространения информации, отметим еще одно неоднократно упоминаемое обстоятельство, связанное с физической природой информации. Поскольку информация неразрывно связана с ее физическим носителем, все процессы обработки информации следует рассматривать с физической точки зрения [1]. Физическое определение меры информации дал Ч. Беннет [4]. Он ввел в рассмотрение ленту, разделенную на ячейки, содержащие по одной частице, положением которой можно управлять, например, с помощью поршня. Положение частицы в левой (правой) половине ячейки соответствует записи в эту ячейку одного бита информации, например 1 (0). Сброс (стирание) бита соответствует частице, движущейся в пределах всей ячейки (стандартное положение). Свободная энергия ленты F, на которую записано I бит информации, равна [5]: [1]

$$F = kT(N - I)\ln 2, \tag{1}$$

где N — число ячеек на ленте.

Рассмотрим в качестве среды передачи информации нелинейный диэлектрик с решеткой, обладающей центром симметрии, в котором может происходить фазовый переход 2-го рода [6]. Уравнения модели имеют вид [7]:

$$c^2 E_{zz} = E_{tt} + 4\pi P_{tt},$$

$$P_{tt} + \sigma P_t + \omega_0^2 P + \alpha P^3 = \frac{\omega_p^2}{4\pi} E, \qquad \omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n}{m}, \tag{2}$$

m — эффективная масса; n — концентрация; ω_0 — частота малых колебаний связанных осцилляторов (модель диэлектрической среды),

[1] Ч. Беннет использует термин „fuel value“ — „количество топлива“, обеспечивающее выполнение эквивалентного количества работы, что, в свою очередь, определяется изменением свободной энергии ленты.

$\omega_0^2 > 0$ для $T > T_c$, $\omega_0^2 < 0$ для $T < T_c$, T_c — температура Кюри; E — поперечное электрическое поле волны; P — поляризация, т.е. дипольный момент единицы объема диэлектрика; σ, α — коэффициенты затухания и нелинейности; t, z — время и координата. В (2) пренебрежено пространственной дисперсией колебаний решетки.

Выбор этой модели можно обосновать следующими соображениями. При $T > T_c$ у системы существует единственное устойчивое состояние $P_0 = 0$, не несущее информации, которое можно сопоставить со стандартным состоянием в указанном выше смысле. При $T < T_c$ у системы появляются два новых устойчивых состояния $P_{1,2} = \pm u(-\gamma/\alpha)^{1/2}$, с которыми можно связать биты 1 и 0, а стандартное состояние $P_0 = 0$ становится неустойчивым. Битом в этой модели можно считать одиночный импульс поляризации той или иной полярности (по договоренности). При движении со скоростью u бит не меняет своего значения, что делает данную модель удобным инструментом при исследовании процесса передачи цифровой информации (цифровых сигналов). Чтобы стереть известный бит, надо перевести систему в стандартное состояние путем нагревания от температуры $T < T_c$ до $T > T_c$, при этом энтропия на кристаллическую ячейку возрастет на $\Delta S = k \ln 2$, как при фазовом переходе 2-го рода. Обратный переход от $T > T_c$ к $T < T_c$ не приведет к установке бита, так как система с равной вероятностью может оказаться в обоих состояниях $P_{1,2}$ [4].

Ограничимся исследованием решений (2) вида $P(z - ut)$ при $T < T_c$, для которых (2) приводит к уравнению

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}P_z^2 + V(P)\right] = \frac{\sigma}{u}P_z^2; \qquad V(P) = \frac{1}{2}\gamma P^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha}{u^2}P^4,$$

$$\gamma = \frac{\omega_0^2}{u^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} < 0, \qquad u \ll c, \tag{3}$$

решение которого можно выразить в виде двух квадратур:

$$z - z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\int\limits_{P_0}^{P}\frac{dP}{\sqrt{G(P) - V(P)}},$$

$$G(P) - G_0 = \pm\frac{\sqrt{2}\sigma}{u}\cdot\int\limits_{P_0}^{P}\sqrt{G(P) - V(P)}\,dP. \tag{4}$$

При $\sigma = 0$ получим известное кноидальное решение (3) (для знака $+$) [8]:

$$z - z_0 = \frac{2\sqrt{2}\,u}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\varphi, k),$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{(b-d)(a-P)}{(a-b)(P-d)}}; \qquad k = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}, \tag{5}$$

$F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл 1-го рода, $a > P > b > c > d$ — корни уравнения $G - V(P) = 0$.

Для малых σ и $-G > 0$ решение (4) представляет серию отдельных импульсов убывающих по амплитуде. При больших σ решение (4) имеет монотонный характер [9]. В первом случае можно ввести понятие скважности $\Gamma = \Delta/\delta$, где Δ — расстояние между импульсами, а δ — ширина отдельного импульса. Величину δ можно приближенно вычислить, считая $\sigma = 0$ и $G = 0$: $P = \pm(-2\gamma u^2/\alpha)^{1/2} \cdot \mathrm{ch}^{-1}[(-\gamma)^{1/2} z]$, $(z_0 = 0)$, т.е. $\delta = (-\gamma)^{-1/2}$. Ширина Фурье-спектра такого решения $\Delta q = 2/(\pi\delta) = 2(-\gamma)^{1/2}/\pi$ (q — волновое число) может быть использована для верхней оценки ширины полосы пропускания канала передачи информации $W \leqslant \Delta q \cdot u$. Величину Δ мы вычислим приближенно, полагая $\sigma = 0$, а G — малой величиной. С точностью до $(-G)^{1/2}$ получим $\Delta = 2/(-\gamma)^{1/2} \ln[8u|\gamma|/(-\alpha G)^{1/2}]$. Для пропускной способности канала $C = u/\Delta$ получим выражение $C/W \geqslant \pi/(2\Gamma) \approx \pi/4 \cdot 1/\ln[8u|\gamma|/(-\alpha G)^{1/2}]$. Используя выражение для амплитуды импульса $A = a - b \approx (-2u^2\gamma/\alpha - 2G/\gamma)^{1/2} - (2G/\gamma)^{1/2} \approx\approx (-2u^2\gamma/\alpha)^{1/2} - (2G/\gamma)^{1/2}$, получим окончательное выражение для оценки пропускной способности нелинейного канала через энергию $E \sim A$, заключенную в одном импульсе:[2]

$$\frac{C}{W} \geqslant \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\ln \frac{8E_m}{E_m - E}}, \tag{6}$$

E_m — энергия, переносимая импульсом максимальной амплитуды $A_m = (-2u^2\gamma/\alpha)^{1/2}$, соответствующей $G = 0$.

В заключение сравним выражение (6) и аналогичное выражение, полученное К. Шенноном для линейных систем [1]: $C/W = \log_2(1 + P/N)$; P, N — средняя мощность сигнала и шума. Для классического

[2] Такая связь $E \sim A$ обусловлена тем, что ширина импульса δ зависит от амплитуды.

канала с аддитивным равновесным шумом $N = WkT$ и для $P \ll N$ пропускная способность $C \approx P/(kT \cdot \ln 2)$, что согласуется с принципом Сцилларда–фон Неймана [1]. Формула Шеннона отражает важное свойство линейных систем: аддитивность сигнала и шума. В то же время известно [10], что в нелинейных системах сигнальные моды жестко связаны друг с другом и воздействие тепловых шумов не разрушает этой связи, приводя лишь к искажению формы сигнала, что, в конечном счете, и приводит к невыполнению принципа Сцилларда–фон Неймана.

Можно дать качественную интерпретацию полученного результата $C/W \geqslant \pi/(2\Gamma)$, если учесть, что $\Gamma \sim N$ — эффективному числу гармоник нелинейного решения (5) [10]. Вводя приведенную пропускную способность $\Sigma = 2C/(\pi W)$, получим универсальную оценку $\Sigma \cdot N \geqslant 1$, пригодную для любых нелинейных каналов передачи информации. Последнее соотношение можно сделать более наглядным, если использовать вместо ширины пропускания W ширину спектра сигнала, состоящего из многих импульсов $W_c < W$, что усилит неравенство. Тогда величина Σ будет представлять полное число импульсов (битов информации), прошедших через канал.

Список литературы

[1] *Landauer R.* // IBM Journ. Res. Dev. 1961. V. 5. P. 183.

[2] *Maxwell Demon 2.* Entropy, Classical and Quantum Information, Computing / Ed. by H.S. Leff, A.F. Rex. IOP Publishing, 2003.

[3] *Landauer R.* // Science. 1996. V. 272. P. 1914–1918.

[4] *Bennett C.H.* // Int. Journ. Theor. Phys. 1982. V. 21. P. 90.

[5] *Feynman R.* Feynman Lectures on Computation / Ed. by A.J.G. Hey & R.W. Allen. Dept. of Electronics & Comp. Sci. Univ. of Southampton, England, Addison–Wesley, 1996.

[6] *Lines M.E., Glass A.M.* Principles and Application of Ferroelectrics and Relative Materials. Clarendon Press, Oxford, 1982 / Пер.: *Лайнс М., Гласс А.* Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. М.: Мир, 1984. 736 с.

[7] *Островский Л.А.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. № 10. С. 1189.

[8] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.

[9] *Карпман В.И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.

[10] *Заславский Г.М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.