01

О плотности электромагнитной энергии и ее скорости в среде с аномальной положительной дисперсией

© М.В. Давидович

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: DavidovichMV@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 21 марта 2006 г.

Рассмотрены простейшие законы дисперсии в диссипативных средах, плотность электромагнитной энергии в них, а также скорости: фазовая, групповая и энергии. Показано, что в полярных диэлектриках с аномальной положительной дисперсией, описываемой формулой Дебая, скорость энергии в плоской монохроматической волне совпадает с фазовой скоростью, а групповая скорость может превышать скорость света.

PACS: 03.50.Kk

Для любого волнового и колебательного процесса можно ввести плотность электромагнитной энергии U и скорость ее переноса v_e, определяемую на основе концепции Н.А. Умова [1] данной плотностью и вектором Пойтинга $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ [2–6]:

$$v_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)/U(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)/U(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Это следует из закона сохранения энергии при общих предположениях. В вакууме

$$U(\mathbf{r}, t) = U_E + U_H = \varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)/2 + \mu_0 \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)/2.$$

В средах плотность энергии часто определяют аналогичным выражением [3–6]

$$U(\mathbf{r}, t) = U_E(\mathbf{r}, t) + U_H(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)/2 + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/2. \quad (2)$$

Однако оно является строгим только для статических полей при постоянной температуре, поскольку соотношения типа $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ в общем случае неверны. Именно, в статических полях при постоянной температуре (2) совпадает с плотностью свободной энергии [3,7,8]. В средах под U следует понимать плотность внутренней энергии системы поле–вещество (в отсутствие поля $U = 0$). Временна́я дисперсия означает интегральную связь векторов полей и индукций [7–10] посредством восприимчивостей типа

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$$= \varepsilon_0 \int_{t_0}^{t} \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt', \tag{3}$$

а из локального закона сохранения [2–6]

$$\mathbf{J}_{in}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \partial_t W(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \tag{4}$$

для плотности мощности сторонних источников поля $\mathbf{J}_{in}$ следует, что $\partial_t W(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Здесь обозначено $\partial_t = \partial / \partial t$. Плотность затраченной на генерацию поля энергии (работы) W представляется в виде

$$W(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t} \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t') + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t') \right\} dt' = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$$

$$+ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \int_{t_0}^{t} \left\{ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') + \mathbf{B}(\mathbf{r}, t') \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \right\} dt'$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \mu_0 \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \int_{t_0}^{t} \Big\{ \varepsilon_0 \hat{\kappa}(\mathbf{r}, 0) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t') + \mu_0 \hat{\chi}(\mathbf{r}, 0) \mathbf{H}^2(\mathbf{r}, t')$$

$$+ \int_{t_0}^{t'} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \partial_t \hat{\kappa}(\mathbf{r}, t' - t'') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'') + \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t') \partial_t \hat{\chi}(\mathbf{r}, t' - t'') \mathbf{H}(\mathbf{r}, t'') \right] dt'' \Big\} dt'. \tag{5}$$

Считается, что при $t < t_0$ поле и его источники отсутствовали, а $W(t_0) = 0$. Второй член в правой части (4) дает диссипацию, связанную с токами проводимости, и отсутствует при $\sigma = 0$. Однако диссипация, связанная с токами поляризации, всегда имеется в (5). Диссипация приводит к нагреву, который, в свою очередь, способен создавать дополнительный вклад в генерирующий поле ток и в тепловое излучение. Поэтому процесс создания поля не является равновесным. Если процесс во времени гармонический (квазигармонический) и выделяемое тепло отводится в термостат, то его можно считать равновесным, а среднюю за период внутреннюю энергию постоянной. Далее будем рассматривать только квазиравновесные квазистационарные (квазигармонические) процессы при постоянной температуре. В отсутствие процессов переноса вещества и пространственной дисперсии $W = U + Q$ [8], где U — внутренняя (свободная) энергия поля и вещества, а Q — диссипированная и отведенная теплота. Таким образом, плотность энергии есть величина интегральная, зависящая от предыстории процесса создания поля, поскольку энергия способна накапливаться. Функция $\hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t)$ равна нулю при $t < 0$, обеспечивая в (5), согласно принципу причинности, заданные пределы интегрирования, а $\hat{\kappa}(\mathbf{r}, t)$ убывает при больших t. Временнóй дисперсии (5) соответствует частотная

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon'(\mathbf{r}, \omega) - j\varepsilon''(\mathbf{r}, \omega) = \int_0^\infty \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt, \tag{6}$$

для которой выполняются соотношения Крамерса–Кронига [7–10].

Рассмотрим однородную среду с законом дисперсии $\hat{\kappa}(t) = \kappa_0 \alpha_0 \exp(-\alpha_0 t)$, где $\tau_0 = 1/\alpha_0$ — характерное время релаксации. Тогда

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega) = 1 + \frac{\kappa_0}{1 + (\omega\tau_0)^2} - j\,\frac{\kappa_0 \omega \tau_0}{1 + (\omega\tau_0)^2}. \tag{7}$$

Такой формулой описывается дисперсия многих веществ, например, дистиллированной воды [11], спиртов, ряда газов и других полярных диэлектриков, т. е. диэлектриков с твердыми (жесткими) диполями [3,11–14]. Дисперсию конкретных веществ во всем бесконечном частотном диапазоне не удается описать простыми формулами типа (7). Для модели газа осцилляторов с собственной частотой ω_0 и потерями, обусловленными коэффициентом затухания ω_c, аналогичная (7) формула имеет вид [8,9,15–17]:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - j\varepsilon''(\omega)$$
$$= 1 - \frac{\omega_p^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\omega_c)^2} - j\,\frac{\omega_p^2\omega\omega_c}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\omega\omega_c)^2}. \qquad (8)$$

Восприимчивость конкретных веществ есть сумма восприимчивостей для нескольких законов типа (7) и/или (8) с учетом внутреннего поля. Заметим, что закон (7) следует из (8) при $\omega \ll \omega_0$ или после предельного перехода ω_0, ω_p, $\omega_c \to \infty$ при условиях $\omega_p^2/\omega_0^2 = \mathrm{const} = \kappa_0$, $\omega_c/\omega_0^2 = \mathrm{const}' = \tau_0$ (идеально жесткие диполи), а дисперсии в плазме с плазменной частотой ω_p соответствует случай $\omega_0 = 0$ (несвязанные диполи).

Целью работы является исследование соотношений между скоростью энергии, фазовой и групповой скоростями в монохроматическом процессе (плоской волне) для законов дисперсии (7) и (8), а также получение плотности электромагнитной энергии. Как известно, дисперсия в средах всегда сопряжена с потерями [3–18], так же как и потери приводят к дисперсии. Закон (7) получен Дебаем для молекул в виде жестких диполей из классического микроскопического рассмотрения [14]. Квантовое описание также дает законы (7), (8) [18]. Пусть $\mu \equiv 1$. Тогда для монохроматического процесса $\exp(j\omega t)$

$$\gamma(\omega) = \omega n(\omega)/c = \omega\sqrt{\varepsilon(\omega)}/c = \beta(\omega) - j\alpha(\omega), \qquad (9)$$

где $\beta(\omega)$ — постоянная распространения, а $\alpha(\omega)$ — постоянная затухания, причем

$$\beta(\omega) = \omega n'(\omega)/c, \quad \alpha(\omega) = \omega n''(\omega)/c, \qquad (10)$$

$$n'(\omega) = \sqrt{\left[\varepsilon'(\omega) + \sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)}\right]/2},$$
$$n''(\omega) = \sqrt{\left[\sqrt{\varepsilon'^2(\omega) + \varepsilon''^2(\omega)} - \varepsilon'(\omega)\right]/2}. \qquad (11)$$

Здесь $n' = \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$ — замедление, при этом всегда $n' \geqslant 0$, $n'' \geqslant 0$. Равенство нулю в первом случае возможно, только если $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$, а во

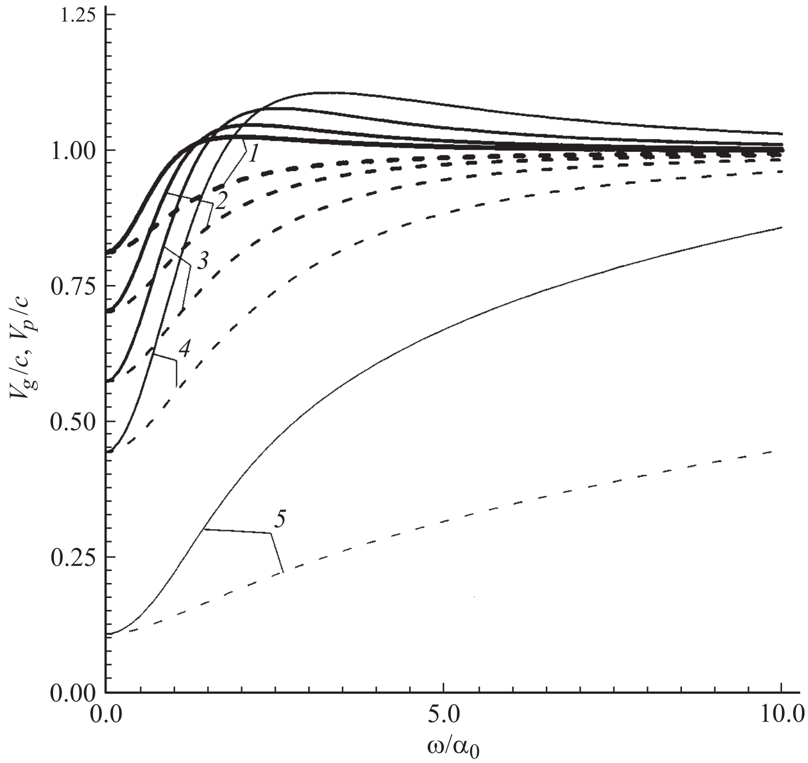

Рис. 1. Нормированные фазовая (– – –) и групповая (—) скорости для полярных диэлектриков с жесткими диполями: $\kappa_0 = 0.5\,(1)$, $\kappa_0 = 1\,(2)$, $\kappa_0 = 2\,(3)$, $\kappa_0 = 4\,(4)$, $\kappa_0 = 80\,(5)$.

втором — также при $\varepsilon'' = 0$. Далее под дисперсией будем понимать зависимость $\beta(\omega)$. Обозначим две характерные скорости: фазовую $v_p(\omega) = \omega/\beta(\omega)$ и групповую $v_g(\omega) = [\partial\beta(\omega)/\partial\omega]^{-1}$. В [19] введена комплексная групповая скорость как одна из характеристик комплексной огибающей импульса (см. также [9]). Однако такая скорость имеет только абстрактный математический интерес и не несет физического смысла. Комплексную же фазовую скорость вполне можно использовать [8]. Дисперсия в средах и линиях передачи характеризуется па-

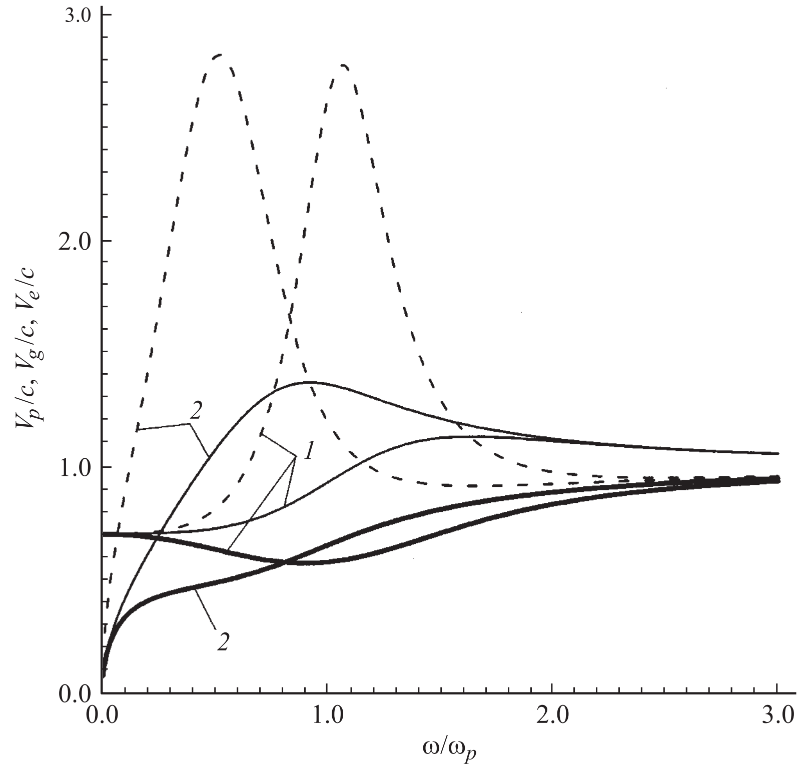

Рис. 2. Нормированные скорости: фазовая, групповая и энергии для закона (9) (соответственно тонкая сплошная, штриховая и жирная сплошная линии) в зависимости от $\Omega = \omega/\omega_p$ при $\omega_0/\omega_p = 1$, $\omega_c/\omega_p = 1.2$ (*1*) и при $\omega_0 = 0$, $\omega_c/\omega_p = 0.85$ (плазма, *2*).

раметром $\partial m'(\omega)/\partial\omega$. При $\partial m'(\omega)/\partial\omega > 0$ $(\partial m'(\lambda)/\partial\lambda < 0)$ дисперсию называют нормальной, а при $\partial m'(\omega)/\partial\omega < 0$ $(\partial m'(\lambda)/\partial\lambda > 0)$ — аномальной. Если направления групповой и фазовой скоростей совпадают, дисперсию также называют положительной (прямая волна), а когда эти направления противоположны, дисперсия является отрицательной (обратная волна) [20]. Известно, что в диссипативных средах групповая скорость может превышать скорость света c [9,16,18,21–23]. Это, в частности, имеет место для аномальной положительной дисперсии [7] (рис. 1), для дисперсии, определяемой законом (8) (рис. 2), включая столкновительную плазму, для проводящих сред. Плотность электромагнитной энергии газа осцилляторов, описываемых законом (8), определяется энергией системы поле–вещество, поэтому в нее необходимо включать энергию осцилляторов [4,8]. Учитывая это и вводя обозначение $\Delta\omega^2 = \omega^2 - \omega_0^2$, при зависимости электрического поля от времени в виде $E_0\cos(\omega t)$ для электрической части энергии получим [8]:

$$U_E(t) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left\{1 + \omega_p^2 \right.$$

$$\left.\times \frac{\Delta\omega^2\left[\omega_c^2\omega^2 - (\Delta\omega^2)^2\right]\cos^2(\omega t) + \omega\omega_c(\Delta\omega^2)^2\sin(2\omega t) + \omega^2(\Delta\omega^2)^2 + \omega_0^2\omega_c^2\omega^2}{\left[(\Delta\omega^2)^2 + \omega_c^2\omega^2\right]^2}\right\},$$

а для плотности потерь будем иметь

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \omega_p^2 \omega_c}{2}$$

$$\times\left\{\frac{\left[(\Delta\omega^2)^2 - \omega_c^2\omega^2\right]\cos^2(\omega t) + \omega\omega_c(\Delta\omega^2)^2\sin(2\omega t) + \omega^2(\Delta\omega^2)^2 + \omega_0^2\omega_c^2\omega^2}{\left[(\Delta\omega^2)^2 + \omega_c^2\omega^2\right]^2}\right\}. \tag{12}$$

Усредненные значения за период приобретают вид [4,8]

$$\langle U_E(t)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2\left\{1 + \omega_p^2(\omega_0^2 + \omega^2)/\left\lfloor(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_c^2\omega^2\right\rfloor\right\}/4, \tag{13}$$

$$\langle Q(t)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \omega_p^2 \omega^2 \omega_c/\left\lfloor(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_c^2\omega^2\right\rfloor/2. \tag{14}$$

Последнее выражение согласуется с формулой

$$Q = \omega\left(\varepsilon_0\varepsilon''(\omega)\langle\mathbf{E}^2(\mathbf{r},\omega)\rangle + \mu_0\mu''(\omega)\langle\mathbf{H}^2(\mathbf{r},\omega)\rangle\right), \tag{15}$$

определяющей среднюю за период работу, затрачиваемую источниками на поддержание гармонического поля и равную количеству выделенной теплоты [7,8]. Выполняя указанный выше предельный переход, для закона (7) получим

$$\langle U_E(t)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2\left\{1 + \kappa_0/\left\lfloor 1 + \omega^2\tau_0^2\right\rfloor\right\}/4 = \varepsilon_0\varepsilon'(\omega)E_0^2/4. \tag{16}$$

Эта формула говорит о том, что энергия в средах с данным законом дисперсии распространяется с фазовой скоростью. Действительно, учитывая магнитную составляющую, для скорости энергии в плоской монохроматической волне найдем

$$v_e(\omega) = c\left(\sqrt{\varepsilon(\omega)} + \sqrt{\varepsilon^\bullet(\omega)}\right)\Big/\left(\varepsilon'(\omega) + |\varepsilon(\omega)|\right) = c/n'(\omega) = v_p(\omega). \tag{17}$$

Для бесстолкновительной плазмы с учетом (21) при $\omega_0 = 0$, $\omega_c = 0$ получаем

$$v_e(\omega) = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2} = c\sqrt{\varepsilon'(\omega)} = v_g(\omega). \tag{18}$$

Интересно выражение мгновенной скорости энергии в точке для плазмы, определенное через неусредненные величины для плоской волны в направлении z:

$$v_e(z,t) = 2c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}\,\cos^2\left(\omega[t - z/v_p(\omega)]\right)$$
$$\times\left\{\omega_p^2/\omega^2 + [2 - \omega_p^2/\omega^2]\cos^2\left(\omega[t - z/v_p(\omega)]\right)\right\}^{-1}. \tag{19}$$

Получим результат (16) иным способом, вычислив полную энергию, затраченную на создание поля (5), и вычтя из нее Q. Воспользуемся предельным переходом от квазимонохроматических процессов к монохроматическим. Пусть источники и все поля изменяются во времени по закону $f(t) = [1 - \exp(-\alpha_1 t)]\sin(\omega_0 t)$ при $t > 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$, т.е. они возникли в момент $t_0 = 0$. Рассмотрим электромагнитное поле при $t \gg 1/\alpha_1$, осуществив предельный переход $\alpha_1 \to +0$, $\alpha_1 t \to \infty$. После предельного перехода процесс становится гармоническим. До выполнения предельного перехода положим $\alpha_1 < \alpha_0$ и $\alpha_1 < \omega_0$. При вычислении интеграла (5) используем спектральное разложение $\hat{\varepsilon}$ в виде (7), а спектральный интеграл вычислим методом вычетов. Имеем

$$\partial_t W_E(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r},t)$$
$$= \frac{\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}^2(\mathbf{r},t)}{2} + \alpha_0\kappa_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r})\partial_t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega,t)}{\alpha_0 + j\omega}\,\exp(j\omega t)d\omega. \tag{20}$$

Используемый в (20) спектр $F(\omega, t)$ является мгновенным, т.е. зависящим от времени:

$$F(\omega, t) = \int_0^t f(\tau)\exp(j\omega\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t (1 - \exp(-\alpha_1\tau))\sin(\omega_0\tau)\exp(j\omega\tau)d\tau$$

$$= \Phi(\omega, \omega_0, 0, t) - \Phi(\omega, \omega_0, \alpha_1, t) - \Phi(\omega, -\omega_0, 0, t) + \Phi(\omega, -\omega_0, \alpha_1, t), \tag{21}$$

где

$$\Phi(\omega, \omega_0, \alpha_1, t) = (2j)^2[\exp(j(\omega_0 - \omega)t - \alpha_1 t) - 1]/[j(\omega_0 - \omega) - \alpha_1].$$

При внесении оператора ∂_t под интеграл он действует как на функцию F, так и на экспоненту, поэтому числитель в интеграле (20) запишем как $[\partial_t F(\omega, t) + j\omega F(\omega, t)]\exp(j\omega t)$. Знаменатель в рассматриваемом интеграле имеет полюс в точке $\omega = j\alpha_0$. При $t < 0$ в соответствии с леммой Жордана контур интегрирования следует замыкать в нижней полуплоскости комплексной плоскости ω, и тогда интеграл равен нулю, что и должно быть. При $t > 0$ замыкаем контур в верхней полуплоскости, и тогда интеграл равен вычету в точке $j\alpha_0$, умноженному на $2\pi j$. В результате получим $W_E(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0\{\varepsilon'(\omega_0)/2 + \varepsilon''(\omega_0)\}\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\sin(\omega_0 t)$. Опуская индекс 0, для усредненной за период запасенной энергии найдем $U_E(\mathbf{r}) = \varepsilon_0\varepsilon'(\omega_0)\mathbf{E}^2(\mathbf{r})/4$. Аналогичный результат для закона (9) не имеет места, и естественно получается соотношение (13), так как у функции (8) полюса другие и их больше. Соответствующее ядро $\hat{\kappa}(t)$ колеблется с затуханием, тогда как для (7) оно экспоненциально затухает, т.е. поляризация устанавливается экспоненциально [24]. В средах с дисперсией (8) может запасаться кинетическая энергия колеблющихся частиц, а при законе (7) этого не происходит. В идеальном случае $\omega_c = 0$ следует, что в полосах прозрачности энергия распространяется с групповой скоростью. Этому соответствует инерционный консервативный механизм поляризации [18,25]. Полярным диэлектрикам (7) соответствует ориентационный релаксационный механизм поляризации [12–14,18]. Для конкретных сред (7) и (8) являются идеализацией, при этом ни v_g ни v_p не характеризуют абсолютно v_e монохроматической волны (рис. 2). Но есть случаи, когда эти скорости в определенных диапазонах описывают ее приближенно. Так, для плазмы с потерями $v_g \approx v_e$, если частота существенно выше критической, а потери малы. Ниже критической частоты отсечки нет, и при $\omega \ll \omega_p$ v_p является лучшим приближением к скорости энергии. Можно показать, что в средах с потерями всегда $v_e < c$, а равенство возможно лишь в случае самосопряженного в смысле [26] поля. Для плоской волны это будет при отсутствии потерь и следует из соотношения (17). Для некоторого класса консервативных систем известна теорема Леонтовича–Лайтхилла [18,25–32], согласно которой $v_e = v_g$ и которая для сред с дисперсией (7) и (8) не выполняется.

Список литературы

[1] *Umov N.F.* // Beweg-Gleich. Energie in contin. Kopern. Zeitschrif d. Math. und Phys. V. 19. Slomilch, 1874.
[2] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. Т. 6. М.: Мир, 260 с.
[3] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1974. 616 с.
[4] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988. 440 с.
[5] *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.
[6] *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1971. 654 с.
[7] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
[8] *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А.* Электромагнетизм и электромагнитные волны. М: Высш. школа, 1985. 504 с.
[9] *Виноградова М.Б. Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979. 384 с.
[10] *Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А.* Основы электродинамики плазмы. М.: Высш. школа, 1978. 408 с.
[11] *Бензарь В.К.* Техника СВЧ-влагометрии. М.: Высш. школа, 1974. 352 с.
[12] *Дебай П.* Полярные молекулы. М.: ГНТИ, 1931. 218 с.
[13] *Дебай П., Закк Г.* Теория электрических свойств молекул. М.–Л.: ГИТТЛ, 1936. 144 с.
[14] *Дебай П.* Избранные труды. Л.: Наука, 1987. 550 с.
[15] *Волькенштейн М.В.* Молекулярная оптика. М.Л.: ГИТТЛ, 1951. 744 с.

[16] *Семенов А.А.* Теория электромагнитных волн. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1968. 318 с.
[17] *Рязанов М.И.* Электродинамика конденсированного вещества. М.: Наука, 1984. 304 с.
[18] *Мандельштам Л.И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 438 с.
[19] *Вайнштейн Л.А.* // УФН. 1976. Т. 118. И. 2. С. 339–367.
[20] *Силин Р.А.* Периодические волноводы. М.: Фазис, 2002. 438 с.
[21] *Давидович М.В.* // Машинное проектирование в прикладной электродинамике и электронике. Саратов: Изд-во ГосУНЦ „Колледж“, 2002. С. 121–126.
[22] *Davidovich M.V.* // Proc. of 15th Int. Conf. on Microwaves, Radar and Wireless Communications (MIKON'04). Poland, Warsaw, May 17–19, 2004. P. 597–602.
[23] *Давидович М.В.* Фотонные кристаллы: функции Грина, интегральные уравнения, результаты. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. 40 с.
[24] Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1983. 928 с.
[25] *Мандельштам Л.И.* Полное собрание трудов. Т. 5. М.: АН СССР. 1950. 468 с.
[26] *Бейтмен Г.* Математическая теория распространения электромагнитных волн. М.: ГИФМЛ, 1958. 180 с.
[27] *Рытов С.М.* // ЖЭТФ. 1947. Т. 17 (10). С. 930.
[28] *Lighthill M.J.* // J. Inst. Math. and its Appl. 1965. V. 1. P. 1–28.
[29] *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* // ЖТФ. 1960. Т. 50. В. 2. С. 241–251.
[30] *Зильберглейт А.С., Копилевич Ю.И.* // ЖТФ. 1980. Т. 50. В. 3. С. 449–460.
[31] *Гуреев А.В.* // ЖТФ. 1990. Т. 61. В. 1. С. 23–28.
[32] *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных средах. М.: Мир, 1983. 136 с.