01;03

Нелинейное дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн на поверхности диэлектрической жидкости

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 15 июня 2006 г.

Показано, что задача о профиле электрокапиллярной волны на границе диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле допускает точное решение в пределе большой диэлектрической проницаемости среды. Это позволило получить и проанализировать точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения, связывающего частоту, волновое число и амплитуду волны.

PACS: 47.65.-d, 47.35.-i, 52.35.Mw

Дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн, распространяющихся вдоль внешнего тангенциального поля в случае бесконечно глубокого слоя жидкости, имеет следующий вид [1,2]:

$$\omega_0^2(k) = \frac{E^2\beta(\varepsilon)}{4\pi\rho}\, k^2 + \frac{\alpha}{\rho}\, k^3, \tag{1}$$

где k — волновое число, ω_0 — частота, α — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность среды, E — напряженность внешнего электрического поля, $\beta = (\varepsilon - 1)^2/(\varepsilon + 1)$, ε — диэлектрическая проницаемость. Основанный на анализе соотношения (1) подход к исследованию эволюции заряженной поверхности жидкости применим лишь в случае возмущений границы малой амплитуды, $A \ll k^{-1}$. Для волн с конечной амплитудой основной нелинейный эффект заключается в зависимости дисперсионного соотношения от A (см., например, [3]):

$$\omega = \omega(k, A).$$

В настоящей работе мы покажем, что для жидкостей с большой диэлектрической проницаемостью $\varepsilon \gg 1$ (для этилового спирта $\varepsilon \approx 26$, для нитробензола $\varepsilon \approx 36$, для воды $\varepsilon \approx 81$) задача о конфигурации нелинейной волны может быть решена аналитически, что позволит нам найти точное выражение для нелинейного дисперсионного соотношения и затем провести его анализ.

Рассмотрим потенциальное движение идеальной жидкости во внешнем однородном тангенциальном электрическом поле. В невозмущенном состоянии граница жидкости представляет собой плоскую горизонтальную поверхность $z = 0$ (ось z декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности жидкости). Будем считать, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x. Ограничимся рассмотрением плоских волн, распространяющихся вдоль направления поля. В этом случае все величины будут зависеть только от переменных x, z и t. Введем функцию $\eta(x, t)$, задающую отклонение поверхности от плоской, т. е. жидкость занимает в пространстве область $z < \eta(x, t)$. Потенциал скорости ϕ для несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа со следующими условиями на границе и на бесконечности:

$$\phi_t + \frac{\phi_x^2 + \phi_z^2}{2} = \frac{P_E - P_0}{\rho} + \frac{\alpha \eta_{xx}}{\rho(1 + \eta_x^2)^{3/2}}, \quad z = \eta,$$

$$\phi \to 0, \qquad z \to -\infty,$$

где P_E — элекростатическое давление, $P_0 = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} E^2$ — давление в жидкости при $z \to -\infty$. В пределе больших ε нормальная компонента электрического поля в жидкости оказывается значительно меньше по абсолютному значению тангенциальной компоненты — силовые линии поля направлены по касательной к искривленной границе. Как следствие, электростатическое давление будет определяться электрическим полем внутри жидкости (φ — его потенциал):

$$P_E \approx \frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\varphi_x^2 + \varphi_z^2\right).$$

Уравнение Лапласа для потенциала φ следует решать со следующими условиями:

$$\varphi \to -Ex, \qquad z \to -\infty,$$

$$\partial_n \varphi \approx 0, \qquad z = \eta,$$

где ∂_n — производная в направлении нормали к поверхности $z = \eta$. Система уравнений замыкается кинематическим соотношением, задающим временну́ю эволюцию свободной поверхности:

$$\eta_t = \phi_z - \eta_x \phi_x, \qquad z = \eta.$$

Уравнения, описывающие геометрию прогрессивной волны (волны, профиль которой не меняется в движущейся с ней системе координат), получаются из приведенных уравнений движения при помощи следующих подстановок:

$$\varphi(x, z, t) = \varphi'(x', z) - ECt, \qquad \phi(x, z, t) = \phi'(x', z) + Cx',$$

$$\eta(x, t) = \eta'(x'), \qquad x = x' + Ct,$$

где постоянная C имеет смысл скорости движения волны по направлению оси x, т. е. вдоль направления вектора напряженности внешнего электрического поля. Они имеют следующий вид:

$$\phi'_{x'x'} + \phi'_{zz} = 0, \qquad \varphi'_{x'x'} + \varphi'_{zz} = 0, \tag{2}$$

$$\phi' \to -Cx', \quad \varphi' \to -Ex', \quad z \to -\infty, \tag{3}$$

$$\partial_n \phi' = 0, \quad \partial_n \varphi' = 0, \quad z = \eta', \tag{4}$$

$$\frac{\phi'_{x'} + \phi'^2_z - C^2}{2} = \frac{\varphi'^2_{x'} + \varphi'^2_z - E^2}{8\pi\rho/\varepsilon} + \frac{\alpha\eta'_{x'x'}}{\rho(1 + \eta'^2_{x'})^{3/2}}, \quad z = \eta'. \tag{5}$$

Несложно заметить, что уравнения (2)–(4) для потенциалов скорости ϕ' и поля φ' совпадают с точностью до констант. Как следствие, между этими потенциалами существует функциональная связь: $\phi'/C = \varphi'/E$.

Исключая с помощью этого соотношения потенциал φ' из уравнения (5), а также вводя функцию тока ψ, гармонически сопряженную к потенциалу ϕ' (т.е. $\psi_{x'} = -\phi'_z$ и $\psi_z = \phi'_{x'}$), получим следующую краевую задачу на нахождение формы волны в движущейся системе координат $\{x', z\}$:

$$\psi_{x'x'} + \psi_{zz} = 0, \tag{6}$$

$$\psi = 0, \qquad z = \eta', \tag{7}$$

$$\psi \to -Cz, \qquad z \to -\infty, \tag{8}$$

$$\frac{\psi_{x'}^2 + \psi_z^2 - C^2}{2} = \frac{\alpha' \eta'_{x'x'}}{\rho(1 + \eta'^2_{x'})^{3/2}}, \quad z = \eta', \tag{9}$$

где мы ввели эффективное поверхностное натяжение:

$$\alpha' = \frac{4\pi\rho C^2}{4\pi\rho C^2 - \varepsilon E^2}\,\alpha. \tag{10}$$

Уравнения (6)–(9) совпадают с уравнениями, описывающими форму прогрессивной капиллярной волны [4], а также с точностью до постоянных множителей, равновесную конфигурацию заряженной поверхности жидкого металла [5,6]. Эта система уранений допускает широкий класс точных периодических решений, задаваемых параметрическими выражениями

$$zk = \frac{2}{l + \sqrt{l^2 - 1}\cos(ls)}, \qquad x'k = ls - \frac{\sqrt{l^2 - 1}\sin(ls)}{l + \sqrt{l^2 - 1}\cos(ls)}, \tag{11}$$

где $l = kC^2\rho/\alpha'$, а s — параметр (один период соответствует изменению s на $2\pi/k$).

Используя это решение, можно найти зависимость амплитуды возмущений поверхности $A = (\eta_{\max} - \eta_{\min})/2$ от волнового числа k, скорости волны C и параметров системы:

$$A = \left(\frac{4\alpha'^2}{C^4\rho^2} - \frac{4}{k^2}\right)^{1/2}.$$

Подставляя сюда формулу (10) для коэффициента α' и разрешая получающееся выражение относительно скорости волны C, находим:

$$C^2 = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi\rho} + \frac{\alpha k}{\rho\sqrt{1 + A^2k^2/4}}. \tag{12}$$

Это выражение дает точное соотношение между скоростью волны, волновым числом и амплитудой. Из него, в частности, видно, что при увеличении амплитуды A скорость C монотонно убывает. Следует отметить, что такая характеризующая степень нелинейности волны величина, как отношение ее амплитуды и длины, не может принимать произвольные значения. Как следует из анализа выражений (11), должно выполняться условие: $0 \leqslant Ak \leqslant 2.3$. В противном случае они задают самопересекающиеся кривые.

Искомое выражение для нелинейного дисперсионного соотношения получим, полагая в (12) $C = \omega k$ (величина C является фазовой скоростью волны):

$$\omega^2(k, A) = \frac{\varepsilon E^2 k^2}{4\pi\rho} + \frac{\alpha k^3}{\rho\sqrt{1 + A^2k^2/4}}. \tag{13}$$

Видно, что в пределе бесконечно малых амплитуд, $A \to 0$, это выражение переходит в линейное дисперсионное соотношение (1).

С использованием (13) можно провести качественный анализ устойчивости решений (11). Для случая сравнительно небольших амплитуд можно представить (13) в виде ряда (разложение Стокса):

$$\omega(k, A) = \omega_0(k) + \omega_2(k)A^2,$$

где ω_0 определяется выражением (1), а $\omega_2(k) \equiv -\alpha k^5/(8\rho)$. Критерием развития модуляционной неустойчивости для волн малой амплитуды является [3]: $\omega_0''\omega_2 < 0$, где $\omega'' = d^2\omega/dk^2$. Несложно обнаружить, что в нашем случае периодический волновой пакет неустойчив при любых k.

Таким образом, в настоящей работе были найдены точные решения для конфигурации прогрессивных электрокапиллярных волн, распространяющихся вдоль направления электрического поля по поверхности идеальной диэлектрической жидкости. С их помощью было получено и проанализировано выражение для нелинейного дисперсионного соотношения, описывающего распространения волн конечной амплитуды.

Данная работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований президиума РАН „Математические методы в нелинейной динамике“ и Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и РосНауки (контракт № 02.442.11.7242).

Список литературы

[1] *Melcher J.R.* Field-Coupled Surface Waves. MIT Press, Cambridge, MA, 1963.
[2] *Melcher J.R.* // Phys. Fluids. 1961. V. 4. P. 1348.
[3] *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
[4] *Grapper G.D.* // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 532.
[5] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79.
[6] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990.