

01;09

## Стабилизация хаоса осциллятора Дуффинга—Ван дер Поля оптимальной коррекцией управляющих параметров

© Ю.В. Талагаев, А.Ф. Тараканов

Балашовский филиал Саратовского государственного университета

E-mail: shangyi@narod.ru

Борисоглебский государственный педагогический институт

E-mail: aft777@mail.ru

Поступило в Редакцию 20 июня 2006 г.

Рассматривается задача параметрической коррекции хаотической динамической системы, которая решается методами теории оптимального управления. На основе предложенной методики для осциллятора Дуффинга—Ван дер Поля найдены оптимальные корректирующие воздействия. В численном эксперименте показано, что под их воздействием происходит стабилизация оптимального предельного цикла.

PACS 05.45.-a

**1. Введение.** Задача стабилизации хаотической динамики является основной в области управления хаосом. Рассмотрим уравнение периодически возбуждаемой автоколебательной системы Дуффинга—Ван дер Поля в виде:

$$\ddot{x} + p_1\dot{x} + p_2x^3 = p_3(1 - x^2)\dot{x} + f \cos(\omega t), \quad (1)$$

где  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  — управляющие параметры,  $f$  и  $\omega$  — амплитуда и частота хаотизирующего возмущения. Применительно к модели (1),

сочетающей характерные свойства эталонных нелинейных колебательных систем [1], в данной работе рассматривается общая задача по нахождению оптимальных корректирующих воздействий на доступные в плане управления параметры, позволяющие осуществить управляемый переход от нерегулярной динамики к регулярной.

Стабилизацию хаотических режимов (1) можно осуществить двумя способами, реализуя методы без обратной связи и методы с обратной связью.

Идея методов управления хаосом без обратной связи сформулирована в работе Lima и Pettini (1990) [2], где в качестве управляющего воздействия использовалось возбуждение параметра  $h(t) = \eta \cos(\Omega t + \varphi)$ . При реализации метода параметрических возбуждений необходима оценка эффективности управляющего воздействия. Из сформулированной на основании критерия Мельникова теоремы стабилизации [3] следует, что для подавления хаоса осциллятора Дуффинга–Холмса необходимо резонансное соотношение частот  $\Omega = r\omega$  (метод резонансной стабилизации [2,4]). В работе Kivshar и др. (1994) показано, что цель достигается при высокочастотном возбуждении  $\Omega \gg \omega$  (метод высокочастотной стабилизации [5]). Стабилизация хаотической динамики (1) параметрическими методами с использованием программного управления получила эффективное развитие в [3,6], где теория Мельникова обобщена на широкий класс нелинейных диссипативных неавтономных систем, в который попадает уравнение (1). В фокусе внимания остается проблема повышения качества управления при минимизации требуемого уровня параметрического воздействия [7].

При реализации методов параметрических возбуждений в уравнениях движения управляющий параметр  $p_0$  заменяется выражением

$$p(t) = p_0(1 + h(t)) = p_0 + p_0h(t) \quad (2)$$

и предполагается, что функция  $p(t)$  мало отличается от своего среднего значения. На функцию  $h(t)$  накладывается необходимое с физической точки зрения требование малости, из которого, однако, неясно, насколько данное воздействие отвечает требованиям оптимальности.

Отсутствие четких критериев оптимальности также проявляется в параметрических методах с обратной связью. Эффективность параметрического метода [8], где впервые была продемонстрирована возмож-

ность малым управляющим воздействием достичь цель управления, зависит от близости траектории к стабилизируемому предельному циклу, вложенному в хаотический аттрактор. Если хаотическая траектория оказывается вдали от целевого множества, то управление становится возможным лишь по истечении достаточно большого промежутка времени, т.е. алгоритм не является оптимальным по быстродействию. На преодоление этого недостатка направлены различные модификации исходного алгоритма [9,10].

Проблема синтеза оптимальных управляющих воздействий является важной составной частью управления хаосом. В разрабатываемых на стыке нелинейной динамики и теории оптимального управления методах, как правило, реализуется только синтез внешнего управления [10–14]. На примере нелинейного вынуждаемого осциллятора в [14] показано, что аддитивное линейное неограниченное управление, максимизирующее функцию Гамильтона, стабилизирует хаос.

С точки зрения учета внутренних свойств динамической системы оптимальное параметрическое управляющее воздействие на систему более предпочтительно. Специфика внешних управлений по определению заключается во вмешательстве в динамику системы и принудительном видоизменении существующего режима в целевой. Из-за специфической динамики конкретной системы интенсивность оптимального управляющего воздействия может не являться малой величиной. Поэтому обязательны ограничения на уровень воздействия. Ввиду сложности одновременной реализации всех этих условий в едином алгоритме стабилизации хаоса, данная проблема остается открытой. Ее исследование является предметом данной работы.

**2. Основной теоретический аппарат задачи коррекции и условия оптимальности.** Возмущенную систему общего вида

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t), h(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, T], \quad (3)$$

где  $x \in R^n$ ,  $h \in R^r$ , требуется перевести в устойчивое состояние. В силу особенностей задачи замену управляющих параметров  $p_i(t) = p_i(1 + h_i(t))$  будем называть коррекцией, которую будем производить с помощью вектор-функции  $h(t) = (h_1(t), \dots, h_r(t))$ ,  $r \leq n$ , компоненты которой назовем корректирующими функциями. Условие  $r \leq n$  означает, что в реальных системах коррекции могут подвергаться не все параметры, а лишь их часть. Если  $r = 1$  (воздействию подвергнут

только один параметр), то речь следует вести об „управляющем“ воздействии, аналогичном (2).

В качестве цели управления выбирается некоторый функционал, имеющий смысл какой-нибудь величины (энергия, время), которую требуется минимизировать

$$J = \int_0^T f_0(t, x(t), h(t)) dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Необходимые условия оптимальности к задаче (3), (4) дает принцип Лагранжа [15]. Составим функцию Гамильтона

$$H(t, x(t), h(t), \psi(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(t, x(t), h(t)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r h_j^2(t), \quad (5)$$

где  $\psi = \psi(t) \in R^n$  — вектор-функция сопряженных переменных.

Если  $h^*(t)$  — оптимальная корректирующая вектор-функция,  $x^*(t)$  — соответствующая траектория, то существуют ненулевые функции  $\psi_i(t)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} H(t, x^*(t), h^*(t), \psi(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n \psi_i(t_0) x_i(t_0) = 0, \quad (6)$$

и выполняются условия стационарности

$$\frac{\partial}{\partial h_j} H(t, x^*(t), h^*(t), \psi(t)) = 0, \quad j = \overline{1, r}. \quad (7)$$

Первое уравнение в (6) и равенство (7) хорошо известны в теории оптимального управления. Второе равенство (условие трансверсальности) в (6) является правилом для выбора начальных значений сопряженных переменных  $\psi(t)$ .

Дополнительно в процессе решения задачи можно требовать удовлетворения ограничений  $|h_j| \leq U$  или более жестких  $|h_j| \leq U_j$  и применять принцип максимума Понтрягина [15]. Тогда максимизирующая гамильтониан (5) функция  $h_i^*$  имеет вид:

$$h_i^*(t) = \begin{cases} h_i^*(t), & \text{если } |h_i^*(t)| \leq U, \\ U \operatorname{sign}(h_i^*(t)), & \text{если } |h_i^*(t)| > U. \end{cases} \quad (8)$$

В классической постановке задачи оптимального управления системой (3) под  $h(t) = (h_1(t), \dots, h_r(t))$  понимались „параметры управления, определяющие ход процесса“ [15, с. 6]. Практические приложения того времени, когда теория создавалась, требовали решения задач с внешним управляющим воздействием. Тем не менее, принцип максимума Понтрягина был сформулирован и доказан для общего случая, включающего как силовое, так и параметрическое воздействие на систему. При этом важно, что способ коррекции  $p_i(t) = p_i(1 + h_i(t))$  и функционал вида (4) приводят к линейно-квадратичной задаче управления, для которой необходимые условия оптимальности являются и достаточными.

**3. Алгоритм коррекции нелинейного осциллятора.** Вводя по параметрам  $p_i$ , корректирующие воздействия  $h_i = h_i(t)$ , перепишем уравнение (1) в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -p_1(1 + h_1)x_1 - p_2(1 + h_2)x_1^3 + p_3(1 + h_3)(1 - x_1^2)x_2 + f \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (9)$$

Потребуем, чтобы функции  $h_i(t)$  были оптимальными в смысле обеспечения минимума затрачиваемой на коррекцию энергии, то есть

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sum_{j=1}^3 h_j^2 dt \rightarrow \min. \quad (10)$$

Составим для (9) функцию Гамильтона

$$\begin{aligned} H(t, x, h, \psi) &= \psi_1 x_2 + \psi_2 [-p_1(1 + h_1)x_1 - p_2(1 + h_2)x_1^3 \\ &\quad + p_3(1 + h_3)(1 - x_1^2)x_2 + f \cos(\omega t)] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 h_j^2. \end{aligned}$$

На основании условия (7) максимизирующие функции  $h_j^*(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} h_1^*(t) &= -p_1 \psi_2(t) x_1(t), & h_2^*(t) &= -p_2 \psi_2(t) x_1^3(t), \\ h_3^*(t) &= p_3 \psi_2(t) x_2(t) (1 - x_1^2(t)), \end{aligned}$$

причем (8) позволяет ограничить их по абсолютной величине.

Оптимальная траектория  $x^*(t)$  находится интегрированием системы уравнений:

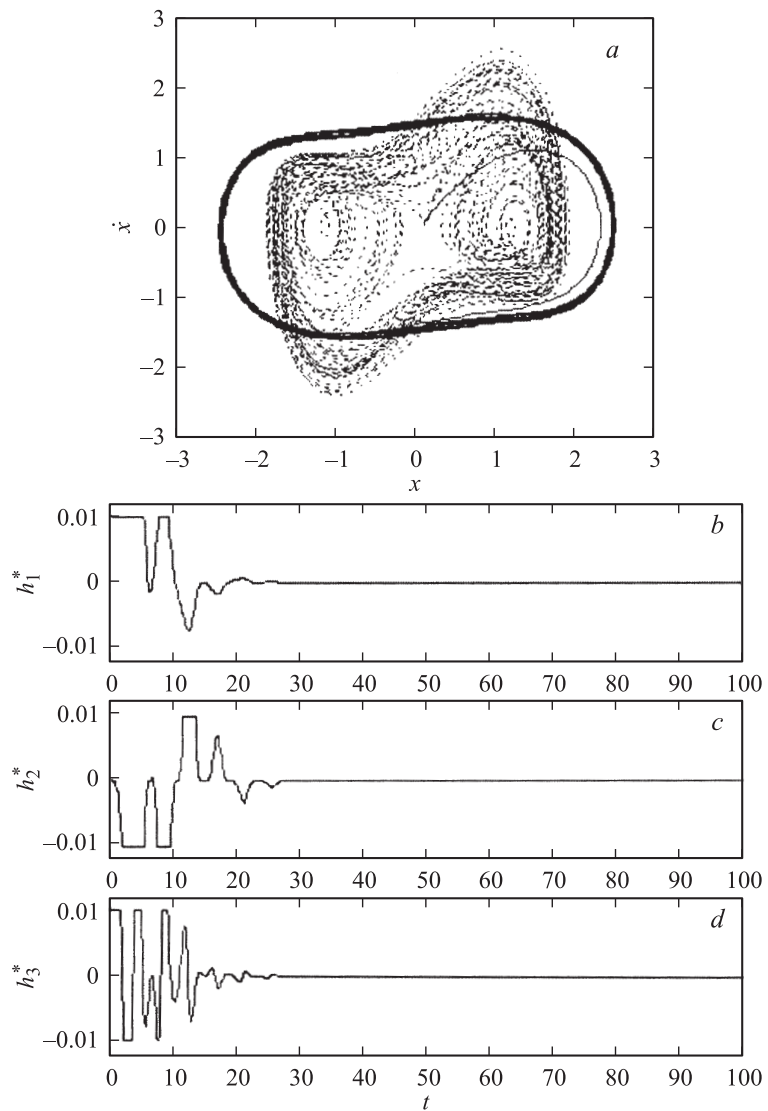
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -p_1(1+h_1)x_1 - p_2(1+h_2)x_1^3 + p_3(1+h_3)(1-x_1^2)x_2 + f \cos(\omega t), \\ \dot{\psi}_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H(t, x, h, \psi) \\ &= \psi_2 [p_1(1+h_1) + 3p_2(1+h_2)x_1^2 + 2p_3(1+h_3)x_1x_2], \\ \dot{\psi}_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} H(t, x, h, \psi) = -\psi_1 - \psi_2 p_3(1+h_3)(1-x_1^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где на основании условия ортогональности в (6) вектор начальных условий:

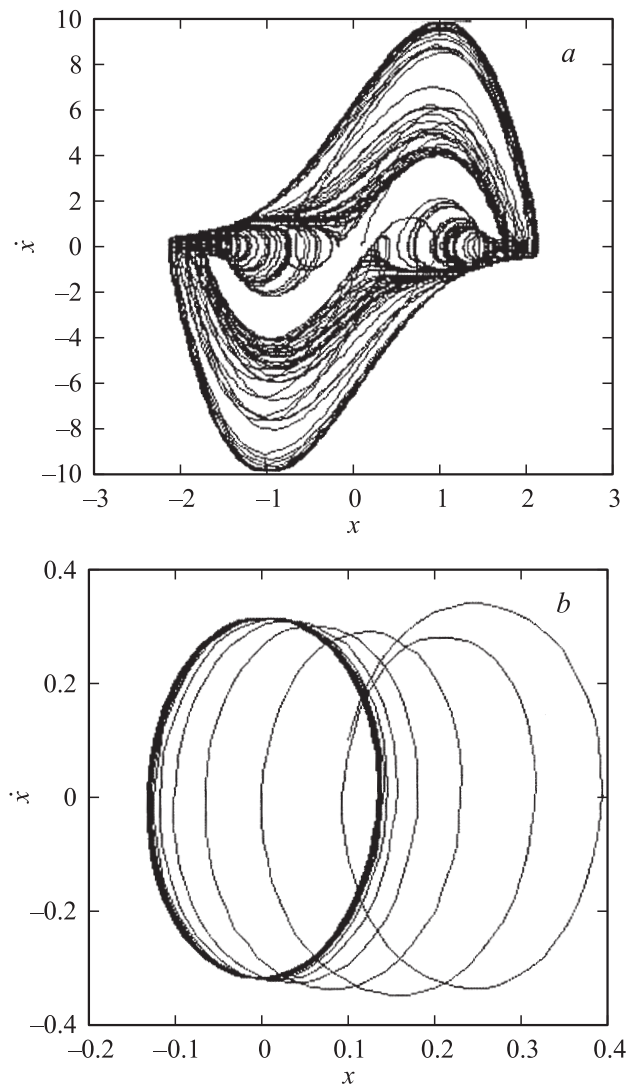
$$(x_1^0, x_2^0, \psi_1^0 = -x_2^0, \psi_2^0 = x_1^0) \text{ или } (x_1^0, x_2^0, \psi_1^0 = x_2^0, \psi_2^0 = -x_1^0).$$

**4. Численный эксперимент и обсуждение результатов.** Система (11) интегрировалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка. Значения параметров корректируемых режимов выбирались таким образом, чтобы динамика исходной системы была хаотической, т.е. фазовые траектории на плоскости  $(x, \dot{x})$  образовывали хаотический аттрактор, а спектр мощности сигнала представлялся сплошной широкой полосой на низких частотах. Ограничение на корректирующие воздействия выбрано как  $|h_j| \leq 0.01$ , т.е. отвечает требованию малости.

Общим результатом коррекции является стабилизация оптимального предельного цикла. Его локализация определяется характеристиками хаотизирующего воздействия ( $f$  и  $\omega$ ) и внутренними динамическими особенностями (значения параметров  $p_i$ ). Как видно из сравнения рис. 1, *a* и рис. 2, *a, b*, в зависимости амплитуды возмущения  $f$  и от знака  $p_1$  он находится либо на внешней границе бассейна притяжения (рис. 1, *a*) хаотического аттрактора, либо вложен в аттрактор (рис. 2, *a, b*). Варьирование начальных условий внутри и вне области значений фазовых переменных, ограниченных предельным циклом, не меняет результат коррекции. Изменение уровня ограничения  $U$  на интенсивность корректирующего воздействия приводит к соответствующему изменению длительности выхода системы на цикл.



**Рис. 1.** Результаты коррекции (1):  $p_1 = -1.44$ ,  $p_2 = 1$ ,  $p_3 = 1$ ,  $f = 0.45$ ,  $\omega = 1.2$ :  $a$  — фазовые плоскости исходной (пунктирная линия) и скорректированных систем (сплошная линия);  $b, c, d$  — оптимальные корректирующие функции.



**Рис. 2.** Результаты коррекции (1):  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0.00025$ ,  $p_3 = 5$ ,  $f = 5$ ,  $\omega = 2.4665$ : фазовые плоскости исходной (a) и скорректированной (b) систем.



Результаты коррекции одновременно по всем параметрам необходимы для оценки возможности управления и идентификации оптимальных корректирующих воздействий (рис. 1, *b, c, d*). Численный эксперимент при  $h_1^* = 0$ ,  $h_2^*(t) = -p_2\psi_2(t)x_1^3(t)$ ,  $h_3^* = 0$  показал, что характерные особенности оптимальной корректирующей функции  $h_2^*$  и скорректированного динамического режима (рис. 1, *a, c*) практически неизменны. Следовательно, представленный алгоритм также является способом синтеза оптимального управления, стабилизирующего хаос.

Если осуществить в (1) замену  $-p_3(1-x^2)\dot{x}$  на  $-p_3\dot{x}$ , то найденные выше оптимальные корректирующие функции  $h_1^*(t)$  и  $h_2^*(t)$  позволяют провести коррекцию осциллятора Дуффинга–Холмса. Для данного осциллятора результаты по стабилизации оптимального цикла оказались аналогичными, подтверждая тем самым общность полученных результатов.

## Список литературы

- [1] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2002. 292 с.
- [2] Lima R., Pettini M. // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 726–733.
- [3] Chacon R. // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. P. 761–764.
- [4] Fronzoni L., Giocondo M. // Phys. Rev. E. 1991. V. 43. P. 6483–6487.
- [5] Kivshar Yu.S., Rödelsperger B., Benner H. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 319–324.
- [6] Chacon R., Diaz Bejarano J. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 3103–3106.
- [7] Chacon R. // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 207–210.
- [8] Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
- [9] Pyragas K. // Phys. Lett. A. 1992. V. 170. P. 421–428.
- [10] Basso M., Genesoi R., Giovanardi L. et al. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1998. V. 8. P. 1699–1706.
- [11] Chen G. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1994. V. 4. P. 461–463.
- [12] Abarbanel H.D.I., Korzinov L., Mees A.I. et al. // Syst. Contr. Lett. 1997. V. 31. P. 263–276.
- [13] Bollt E.M., Kostelich E.J. // Phys. Lett. A. 1998. V. 245. P. 399–406.
- [14] Luchinsky D.G., Beri S., Mannella R., McClintock P.V. et al. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2002. V. 12. N 3. P. 583–604.
- [15] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.