

01;06

## Электронно-дырочные лавины в полупроводниках

© А.С. Кюрегян

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина, Москва  
E-mail: ask@vei.ru

В окончательной редакции 27 ноября 2006 г.

Предложена аналитическая теория развития электронно-дырочных лавин в полупроводниках, качественно отличающихся от электронных лавин в газах. Определены пространственно-временные распределения полей и зарядов лавины. Началом лавинно-стримерного перехода предложено считать момент времени  $t_a$ , когда коэффициенты ударной ионизации  $\alpha$  в центре лавины уменьшаются на 20%. Получено трансцендентное уравнение, позволяющее рассчитывать  $t_a$  как функцию невозмущенного значения  $\alpha(E_{ext})$ , заданного внешним полем  $E_{ext}$ . Обнаружено, что при увеличении  $\alpha(E_{ext})$  от  $10^3$  до  $10^5 \text{ cm}^{-1}$  полное число рожденных к моменту  $t_a$  пар уменьшается почти на 3 порядка.

PACS: 72.20.Ht, 72.20.Jv, 85.30.Mn

Электрический пробой длинных промежутков, заполненных газом при больших давлениях, обычно начинается с электронных лавин, которые превращаются в стримеры после прохождения лавиной некоторого критического расстояния  $L_s \approx 20/\alpha_e$ , где  $\alpha_e$  — коэффициент ударной ионизации электронами [1,2]. Подобное развитие пробоя возможно и в полупроводниках, в частности, в сильно перенапряженных  $p$ - $n$ -переходах [3,4], однако эволюция электронно-дырочных лавин и лавинно-стримерные переходы (ЛСП) в полупроводниках до сих пор никем не изучались. Между тем они должны обладать существенными особенностями, поскольку все кинетические коэффициенты электронов и дырок в сильных полях соизмеримы, тогда как в газах и ударная ионизация, и перенос заряда осуществляются главным образом электронами. Исследование развития лавин и ЛСП особенно важно, поскольку в результате именно этих процессов возникают „естественные“ зародыши, параметры которых определяют характеристики развивающихся из них стримеров в сильном внешнем поле [5]. В настоящем сообще-

нии предложена аналитическая теория электронно-дырочной лавины, позволяющая вычислить ее основные параметры до начала искажения внешнего поля объемным зарядом лавины и определить время  $t_a$  начала ЛСП.

Распределения электронов  $n(t, \mathbf{r})$  и дырок  $p(t, \mathbf{r})$  в лавине описываются системой уравнений непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_n = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \mathbf{j}_p = \alpha_e v_e n + \alpha_h v_h p \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями

$$n(0, \mathbf{r}) = p(0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad n(t, \infty) = p(t, \infty) = 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{j}_{n,p} = (\mathbf{v}_{e,h}n - D_{e,h}\nabla n)$  — потоки,  $\alpha_{e,h}$  — коэффициенты ударной ионизации,  $\mathbf{v}_{e,h}$  — дрейфовые скорости,  $D_{e,h}$  — коэффициенты диффузии электронов и дырок соответственно,  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция Дирака. Условия (2) подразумевают, что зародышем лавины является единичная электронно-дырочная пара, возникшая в точке  $\mathbf{r} = 0$  в момент времени  $t = 0$ , и что размеры лавины значительно меньше толщины области сильного поля.

Рассмотрим простейший случай однородного внешнего поля  $E_{ext}$ , направленного вдоль оси  $x$ . Тогда интегрирование (1) по всему объему приводит к уравнению для полного количества пар в лавине  $N_i(t) = \int n(t, \mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , решение которого с начальным условием  $N_i(0) = 1$  имеет вид

$$N_i(t) = \exp \int_0^t (\alpha_e v_e + \alpha_h v_h) dt. \quad (3)$$

В сильных полях скорости дрейфа и коэффициенты диффузии электронов и дырок мало отличаются друг от друга, поэтому мы будем считать, что  $v_e = v_h = v_s$  и  $D_e = D_h = D$ . Лавина обладает аксиальной симметрией, поэтому решение уравнений (1) можно представить в виде

$$n(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N}_n(t, x)R(r, \rho), \quad p(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N}_p(t, x)R(t, \rho), \quad (4)$$

где  $R(t, \rho) = (4\pi Dt)^{-1} \exp(-\rho^2/4Dt)$ ,  $\rho$  — расстояние от оси лавины. Линейные плотности электронов и дырок в лавине  $\mathcal{N}_n(t, x) =$

$= \int n(t, \mathbf{r}) dydz$  и  $\mathcal{N}_p(t, x) = \int p(t, \mathbf{r}) dydz$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}_n}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathcal{N}_n}{\partial \chi} - \frac{1}{4\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_n}{\partial \chi^2} &= \frac{\partial \mathcal{N}_p}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{N}_p}{\partial \chi} - \frac{1}{4\beta} \frac{\partial^2 \mathcal{N}_p}{\partial \chi^2} \\ &= \frac{\alpha_e}{\alpha} \mathcal{N}_n + \frac{\alpha_h}{\alpha} \mathcal{N}_p, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\beta = v_s/4\alpha D$ ,  $\alpha = \sqrt{\alpha_e \alpha_h}$  и введены новые переменные  $\tau = \alpha v_s t$ ,  $\chi = \alpha x$ . Если поле  $E_{ext}$  не слишком велико, то  $\beta \gg 1$  и слагаемыми  $(4\beta)^{-1} \partial^2 \mathcal{N}_{n,p} / \partial \chi^2$  в (5), описывающими продольную диффузию, можно пренебречь. Тогда в области  $|x| < v_s t$  решение системы (5), удовлетворяющее условиям (2), имеет вид [6]

$$\mathcal{N}_{n,p} = \frac{\alpha}{2} e^{(\gamma_+ \tau + \gamma_- \chi)} \left[ \gamma_+ \left( 2 \pm \frac{\gamma_-}{\gamma_+} - e^{-\gamma_- \chi} \right) I_0(z) + \frac{\tau \mp \chi}{z} I_1(z) \right], \quad (6)$$

где верхний знак относится к электронам, а нижний — к дыркам,  $\gamma_{\pm} = (\alpha_h \pm \alpha_e)/2\alpha$ ,  $I_{0,1}(z)$  — модифицированные функции Бесселя с аргументом  $z = \sqrt{\tau^2 - \chi^2}$ . Из (4) и (6) следует формула для плотности объемного заряда лавины

$$Q(\mathbf{r}, t) = q\alpha R(\rho, t) \exp(\gamma_+ \tau + \gamma_- \chi) \left[ \gamma_- I_0(z) + \frac{\chi}{z} I_1(z) \right]. \quad (7)$$

Далее для упрощения формул будем считать, что  $\alpha_e = \alpha_h = \alpha$ . В этом случае

$$Q(t, \mathbf{r}) = qR(t, \rho) \frac{\exp(2\alpha v_s t)}{v_s t} G(\alpha v_s t, \alpha x), \quad (8)$$

где  $G(\tau, \chi) = e^{-\tau} \tau \chi (\tau^2 - \chi^2)^{-1/2} I_1(\sqrt{\tau^2 - \chi^2})$ ,  $q$  — заряд электрона. Из (3) и (8) следует, что отношение полного заряда каждой из половинок лавины к  $qN_i(t)$  равно  $[I_0(\tau) - 1] \exp(-\tau) \approx 1/\sqrt{2\pi\tau}$ . Последнее равенство верно при больших значениях  $\tau$ , которые только и представляют интерес. Видно, что заряды большинства ( $\sim 85\%$ ) электронов и дырок в лавине компенсируют друг друга и лишь малая часть (около 15%) влияет на искажение внешнего поля.

Формулы (6)–(8) описывают структуру лавины до тех пор, пока искажение внешнего поля зарядом  $Q(t, \mathbf{r})$  не приведет к заметному изменению темпа ударной ионизации при  $t = t_a$  или увеличению скорости расширения лавины за счет радиальной компоненты дрейфового

тока при  $t = t_v$ . Для оценки  $t_a$  достаточно вычислить продольное поле лавины  $E_a^{\parallel}(t, x)$  на оси  $x$ , поскольку учет поперечного поля  $E_a^{\perp}(t, \mathbf{r})$  при расчете  $\alpha(E)$  дает лишь малые квадратичные поправки  $(E_a^{\perp})^2/2E_0$ . Если длина лавины  $2v_s t$  много меньше расстояний от нее до электродов, то можно пренебречь силами изображений и воспользоваться формулой

$$E_a^{\parallel}(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{Q(t, \mathbf{r}')}{\sqrt{(x-x')^2 + \rho'^2}} d\mathbf{r}' \right], \quad (9)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость полупроводника. Подставляя (8) в (9), получим после интегрирования по  $\rho$

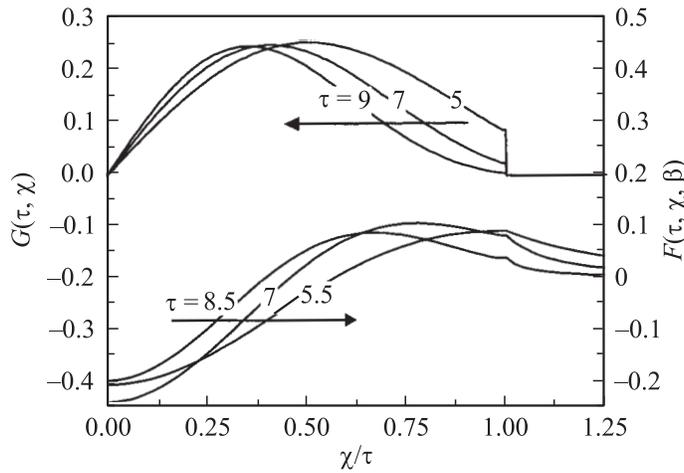
$$E_a^{\parallel}(t, x) = \frac{q\alpha^2\beta^{1/3}}{2\pi\epsilon} \frac{\exp(2\tau)}{\tau^{3/2}} F(\tau, \chi, \beta), \quad (10)$$

$$F(\tau, \chi, \beta) = \sqrt{\tau} \beta^{2/3} \int_{\chi-1}^{\chi+1} (u-\chi) G(\tau, u) \left( \frac{u}{|u|} - \sqrt{\pi\beta} u e^{\beta u^2} \operatorname{erfc}|\sqrt{\beta}u| \right) du.$$

Графики функций  $G(\tau, \chi)$  и  $F(\tau, \chi, \beta)$  приведены на рис. 1. Как видно, плотность объемного заряда лавины достигает максимального значения  $G_m$  вблизи  $x = x_q = (0.3 - 0.5)v_s t$ ; при актуальных значениях  $\tau$  с хорошей точностью  $G_m = \max G(z, \tau) \approx 0.25$ . При больших  $\tau$  плотность объемного заряда экспоненциально сильно уменьшается с ростом  $|x|$  в области  $|x| > x_q$ , поэтому продольное поле лавины  $E_a^{\parallel}$  достигает максимального значения  $E_{aM}^{\parallel}$  не на границах, а в плоскости  $x = x_E$ , причем  $x_q < x_E < v_s t$ . При малых  $\tau$  плотность заряда уменьшается к краям лавины относительно слабо, скачок зависимости  $Q(x, t)$  в точках  $|x| = v_s t$ , возникший вследствие пренебрежения продольной диффузией, соизмерим с  $Q_m$  и может заметно влиять на результат вычисления  $E_{aM}^{\parallel}$ . Однако для расчета времени  $t_a$  это не имеет значения, поскольку заряд лавины уменьшает поле в точке  $\mathbf{r} = 0$  на величину

$$E_{am}^{\parallel}(t) = -\frac{q\alpha^2\beta^{1/3}}{2\pi\epsilon} \frac{\exp(2\tau)}{\tau^{3/2}} D(\tau, 0, \beta), \quad (11)$$

которая примерно в 2 раза превосходит  $E_{aM}^{\parallel}$ . Кроме того, в центре лавины концентрации электронов и дырок намного больше, чем при



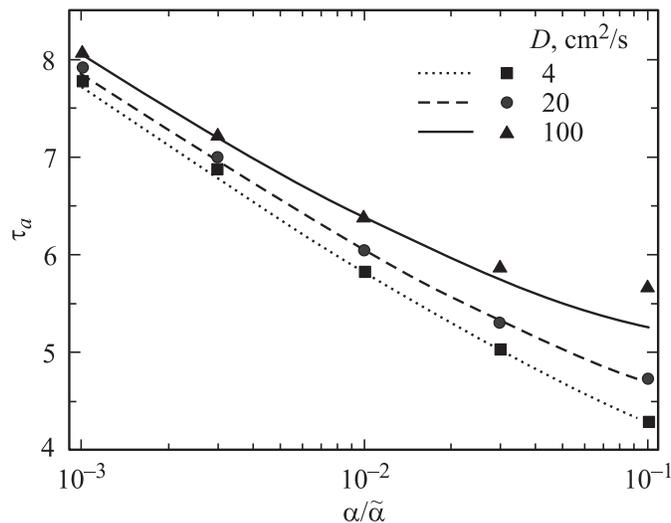
**Рис. 1.** Нормированные распределения плотности объемного заряда  $G(\tau, \chi)$  и продольного поля  $F(\tau, \chi, \beta)$  вдоль лавины. Цифры у кривых указывают величины параметра  $\tau = \alpha v_s t$ . Значения параметра  $\beta = v_s / 4\alpha D$  в функции  $F(\tau, \chi, \beta)$  вычислялись для каждого  $\tau$  по формуле (12).

$x = x_E$ . Поэтому искажение внешнего поля зарядом лавины, в первую очередь, приведет к снижению суммарного темпа ударной ионизации и замедлению скорости роста  $N_i(t)$ .

Таким образом, для вычисления  $t_a$  необходимо найти условие уменьшения  $\alpha$  в центре лавины в  $\delta$  раз. Для типичной зависимости  $\alpha(E) = \tilde{\alpha} \exp(-\tilde{E}^k / E^k)$  это произойдет при  $|E_{am}^{\parallel}| = k^{-1} \tilde{E} (\ln \tilde{\alpha} / \alpha)^{-2/k} \ln \delta$ , где  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{E}$  — константы материала, а  $k = 1$  или  $2$ . Конечно, вычисленный таким образом момент начала ЛСП является несколько условным, однако конечный результат очень слабо зависит от выбора величины  $\delta$ . Далее мы будем считать, что „критическим“ является изменение  $\alpha$  на 20%, т.е.  $\delta = 1.25$ . Используя этот критерий начала ЛСП и формулу (11), легко получить уравнение для  $\tau_a = \alpha v_s t_a$ :

$$\tau_a^{3/2} \exp(-2\tau_a) = g |F(\tau, 0, \beta)| (\alpha / \tilde{\alpha})^{5/3} (\ln \tilde{\alpha} / \alpha)^{2/k}, \quad (12)$$

где  $g = \frac{q\tilde{\alpha}^2 k}{2\pi\epsilon\tilde{E}\ln\delta} \left(\frac{v_s}{4\alpha D}\right)^{1/3} \approx 0.036$  при типичных значениях  $v_s = 10^7$  см,  $D = 20$  см<sup>2</sup>/с,  $\epsilon = 10^{-12}$  Ф/см,  $\tilde{\alpha} = 10^6$  см<sup>-1</sup>,  $\tilde{E} = 1.5 \cdot 10^6$  В/см,  $k = 1$ .



**Рис. 2.** Зависимости безразмерного времени начала ЛСП  $\tau_a$  от нормированного коэффициента ударной ионизации в исходном внешнем поле при различных значениях коэффициента диффузии  $D$ . Линии — аналитический расчет по формуле (12), точки — результат численного моделирования.

Результаты решения (12) при  $\delta = 1.25$  приведены на рис. 2. Уравнение (12) можно упростить, учитывая, что  $F(\tau, 0, \beta) \approx -0.22$  с погрешностью не хуже 10% при актуальных значениях  $\tau = 4-10$  и  $\beta = 1-100$ .

Причиной ЛСП является, конечно, не уменьшение поля в центре лавины, а его увеличение вблизи концов. Однако условие  $E_{aM}^{\parallel} = k^{-1} \tilde{E} (\ln \tilde{\alpha} / \alpha)^{-2/k} \ln \delta$  увеличения скорости ударной ионизации в  $\delta$  раз будет выполнено при  $t = \hat{t}_a > t_a$ , когда использование формулы (10) для вычисления поля уже может привести к заметным ошибкам. Если же пренебречь этим обстоятельством, то для  $\hat{t}_a = \alpha v_s \hat{t}_a$  можно аналогичным образом получить уравнение, отличающееся от (12) добавлением в левую часть множителя  $1.7 \hat{t}_a^{1/6} \approx 2.3$ .

Для оценки времени  $t_v$ , при котором вклад поперечного дрейфового тока в расширение лавины становится заметным, необходимо знать величину  $E_a^{\perp}(t, x, \rho)$ . При  $\rho \sim 2\sqrt{Dt} \ll v_s t$  ее можно вычислить в приближении равномерно заряженной нити. Мак-

симум поперечного поля расположен на расстоянии  $2.14\sqrt{Dt}$  от оси и равен  $E_{aM}^\perp(t, x) \approx 0.16 \frac{q\alpha}{\pi\epsilon} \sqrt{\frac{\alpha v_s}{D}} \frac{\exp(2\tau)}{\tau^{3/2}} G(\tau, \chi)$ . Наибольшая скорость поперечного дрейфа в линейном по  $E_{aM}^\perp$  приближении равна  $v_M^\perp(x, t) \approx v_s E_{aM}^\perp(x, t)/E_{ext}$ , а смещение электронов и дырок в радиальном направлении за счет дрейфа во всяком случае не превосходит величины

$$\rho(t, x) = \int_{x/v_s}^t v_M^\perp(t, x) dt. \quad (13)$$

При написании (13) мы пренебрегали вкладом поперечного дрейфа за время  $t_x < x/v_s$  в ширину лавины в плоскости  $x$ . Это оправдано вдали от ее концов, где выполняется неравенство  $\exp[2\alpha(v_s t - x)] \gg 1$ , вследствие экспоненциального роста со временем плотности объемного заряда и поперечного поля. Анализ результатов численного интегрирования (13) показывает, что поперечное смещение за счет дрейфа максимально при  $x \approx x_q$  и равно

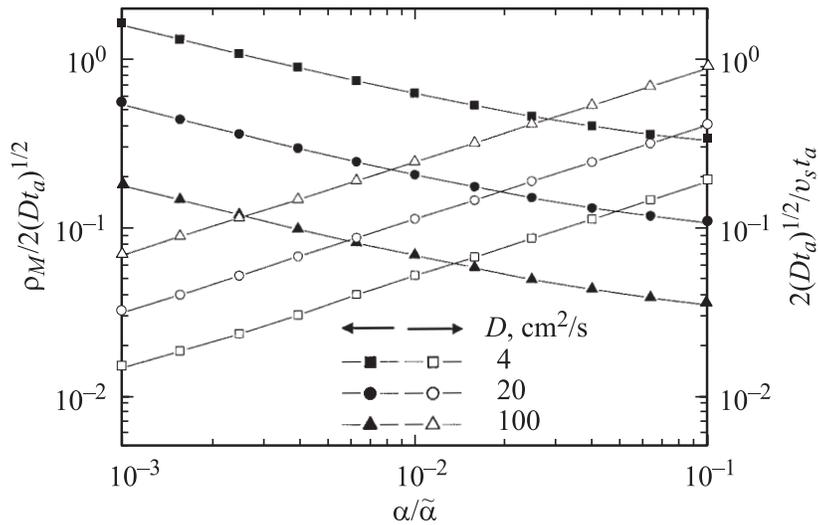
$$\rho_M(t) = \max \rho(t, x) \approx \frac{0.064q\alpha}{\pi\epsilon E_{ext}} \sqrt{\beta} \frac{\exp(2\tau)}{\tau^{5/3}}. \quad (14)$$

Используя (14) и (12), легко показать, что к моменту времени  $t = t_a$

$$\frac{\rho_M(t_a)}{2\sqrt{Dt_a}} \approx \frac{0.6}{\ln \bar{\alpha}/\alpha} \left( \frac{\beta}{\tau_a} \right)^{2/3}. \quad (15)$$

Результаты вычислений по этой формуле приведены на рис. 3. Видно, что в сильных полях и при больших  $D$  поперечным дрейфом можно пренебречь, так как  $\rho_M(t_a) \ll 2\sqrt{Dt_a}$ . В слабых полях и при малых  $D$  этот механизм расширения лавины становится существенным и может заметно уменьшить  $E_{aM}^\parallel$ . Однако на уменьшение  $\alpha$  вблизи центра лавины (которое, как было показано выше, определяет время  $t_a$ ) он влияет гораздо слабее, поэтому практически всегда  $t_a < t_v$  и именно момент времени  $t = t_a$  следует считать началом ЛСП.

При выводе (12) мы еще пренебрегали продольной диффузией, что оправдано, если в момент начала ЛСП длина лавины  $2v_s t_a$  много больше ее диаметра  $4\sqrt{Dt_a}$ . Как видно из рис. 3, это условие обычно хорошо выполняется, но может быть нарушено в сильных полях и при больших  $D$ . В этом случае продольная диффузия уменьшит плотность



**Рис. 3.** Зависимости отношений максимального смещения за счет поперечного дрейфа к диффузионному радиусу лавины (темные значки) и диффузионного диаметра лавины к ее длине (светлые значки) от нормированного коэффициента ударной ионизации в момент времени  $t = t_a$  при различных значениях коэффициента диффузии  $D$ .

объемного заряда лавины и ослабит искажение внешнего поля. Таким образом, формула (12) должна давать заниженные значения времени начала ЛСП из-за пренебрежения продольной диффузией (в сильных полях и при больших  $D$ ) и поперечным дрейфом (в слабых полях и при малых  $D$ ). Наибольшую точность она обеспечивает при промежуточных значениях  $\alpha$  и  $D$ , которые, впрочем, представляют наибольший интерес.

Для проверки изложенных выше результатов мы провели численное моделирование развития электронно-дырочной лавины в однородном и постоянном внешнем поле. Система уравнений (1) решалась методом конечных элементов вместе с уравнением Пуассона при  $D_{e,h} = D$ ,  $v_{e,h} = v_s E / (E + E_s)$ ,  $E_s = 0.01\tilde{E}$  и значениях остальных параметров, указанных выше. Размеры всей области интегрирования были не меньше  $100/\alpha$ , размеры элементов в области развития лавины —  $0.1/\alpha$ ,

а вблизи начала координат —  $0.1/\tilde{\alpha}$ . Зависимость  $n(0, \mathbf{r}) = \rho(0, \mathbf{r})$  аппроксимировалась гауссовой функцией с характерным диаметром  $2/\tilde{\alpha}$  и амплитудой, обеспечивающей равенство  $N_i(0) = 1$ . Результаты вычисления моментов времени, при которых коэффициент ударной ионизации в центре лавины уменьшался в 1.25 раза, приведены на рис. 3. Как видно, основные выводы аналитической теории качественно и количественно согласуются с результатами численного моделирования. Расхождения заметны только при  $\alpha \geq 0.03\tilde{\alpha}$  и  $D = 100 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , но и в этих случаях они не превосходят 10%.

В заключение следует подчеркнуть основные отличия электронно-дырочных лавин в полупроводниках от электронных лавин в газах. Вплоть до начала ЛСП электронная лавина в газах остается сферически симметричной. Ее центр расположен на расстоянии  $v_e t$  от точки старта лавины, а характерный радиус равен  $2\sqrt{D_e t}$ . Между облаком электронов и точкой старта расположен „след“ лавины, состоящий из почти неподвижных положительно заряженных ионов. Вследствие сферической симметрии лавины диффузия электронов во всех направлениях играет одинаково важную роль в формировании объемного заряда и искажении внешнего поля. Минимум полного поля находится на оси лавины приблизительно в точке  $(v_e t - 2\sqrt{D_e t})$ , а максимум — в точке  $(v_e t + 2\sqrt{D_e t})$ . Поэтому темп ударной ионизации начинает увеличиваться непосредственно перед фронтом лавины, где впоследствии и произойдет ЛСП [1,2]. В то же время симметричная электронно-дырочная лавина представляет собой цилиндрическое облако с длиной  $2v_s t$  и радиусом  $2\sqrt{D t}$ . Главную роль в формировании объемного заряда и искажении внешнего поля играют продольный дрейф и поперечная диффузия. Заряды большинства электронов и дырок компенсируют друг друга, минимум поля расположен на оси лавины в точке старта, а максимумы — в точках  $\pm x_E$ , которые могут быть расположены значительно ближе к точке старта, чем передний и задний фронты  $\pm v_s t$ . Эти различия особенно велики в относительно слабых полях, когда  $\sqrt{\beta\tau_a} \gg 1$ , и в момент начала ЛСП  $t_a$  выполняются сильные неравенства  $v_e t_a \gg 2\sqrt{D_e t_a}$  и  $v_s t_a \gg 2\sqrt{D t_a}$ .

Автор благодарен А.В. Горбатюку, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-02-16541 и 05-08-18235).

## Список литературы

- [1] Ретер Г. Электронные лавины и пробой газов. М.: Мир, 1968.
- [2] Лозаннский Э.Д. // УФН. 1975. Т. 117. В. 3. С. 491–521.
- [3] Вайнштейн С.Н., Жилев Ю.В., Левинштейн М.Е. // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. В. 16. С. 1527–1530.
- [4] Кюрегян А.С. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С. 11–19.
- [5] Дьяконов М.И., Качоровский В.Ю. // ЖЭТФ. 1989. Т. 95. В. 5. С. 1850–1859.
- [6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.