01;02

Об излучении Вавилова–Черенкова в активных бирезонансных средах

© А.В. Тюхтин, С.Н. Галямин

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: tyukhtin@bk.ru

Поступило в Редакцию 29 ноября 2006 г.

Анализируется излучение заряженной частицы, движущейся в среде, обладающей двумя резонансными частотами. Показано, что среда усиливает генерируемые электромагнитные волны при условии активности нижнего резонанса и пассивности верхнего в том случае, когда скорость движения заряда лежит в определенных пределах. Приведены методика и пример расчета усиливаемого излучения.

PACS: 41.60.Bq

В последние годы внимание исследователей привлекала проблема генерации излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) при наличии активной среды [1,2]. В такой ситуации при определенных условиях электромагнитная энергия будет черпаться в основном из запаса энергии, имеющегося в среде, что должно приводить к генерации мощных полей даже в случае незначительного тока возбуждающего пучка электронов. Получаемое поле можно использовать, к примеру, в кильватерных ускорителях заряженных частиц [3–5]. Схема кильватерного ускорения с использованием активной среды в англоязычной литературе получила название „Particle acceleration by stimulated emission of radiation" (PASER) [1].

Подчеркнем, что активная среда, как правило, обладает выраженной частотной дисперсией. Между тем даже в случае пассивной среды учет дисперсии может быть весьма значимым при расчетах ИВЧ [6–8]. В случае активной среды роль дисперсии оказывается еще более существенной. В частности, усиление ИВЧ возможно даже в том случае, когда показатель преломления активной среды является чисто вещественным. Однако, если имеется лишь одна резонансная частота, то данный эффект достижим только в том случае, когда среда заключена в волноведущую структуру [1,2]. В настоящей работе мы покажем, что усиление ИВЧ возможно и в неограниченной активной среде, если она имеет хотя бы две резонансные частоты и выполнены некоторые дополнительные требования.

Пусть точечный заряд q движется с постоянной скоростью $\mathbf{V} = V\mathbf{e}_z$ (где $V > 0$) в изотропной однородной линейной среде без пространственной дисперсии с показателем преломления $n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$. Тогда, как известно [9–12], в цилиндрической системе координат ρ, ϕ, z компоненты электромагнитного поля могут быть записаны в виде

$$\{E_\rho, E_z, H_\varphi\} = \frac{q}{2c}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\{e_\rho(\omega), e_z(\omega), h_\varphi(\omega)\}d\omega; \tag{1}$$

$$e_\rho(\omega) = \frac{is(\omega)}{\beta\varepsilon(\omega)} H_1^{(1)}\big(s(\omega)\rho\big)\exp\left[i\omega\frac{\xi}{V}\right], \tag{2а}$$

$$e_z(\omega) = \frac{1}{c}\,\frac{1 - n^2(\omega)\beta^2}{\varepsilon(\omega)\beta^2}\,\omega H_0^{(1)}\big(s(\omega)\rho\big)\exp\left[i\omega\frac{\xi}{V}\right], \tag{2б}$$

$$h_\varphi(\omega) = is(\omega)H_1^{(1)}\big(s(\omega)\rho\big)\exp\left[i\omega\frac{\xi}{V}\right], \tag{2в}$$

где $\xi = z - Vt, \beta = V/c$, c — скорость света в вакууме, $H_\nu^{(1)}$ — функции Бесселя,

$$s^2(\omega) = \frac{\omega^2}{V^2}\big(n^2(\omega)\beta^2 - 1\big). \tag{3}$$

Следует, однако, подчеркнуть, что формулы (1)–(3) еще не определяют однозначно электромагнитное поле, пока не определен радикал $s(\omega) = \sqrt{s^2(\omega)}$ на контуре интегрирования. Это можно сделать с помощью некоторых физических соображений, о чем речь пойдет далее.

В настоящей работе мы будем рассматривать среду, имеющую две резонансные частоты ω_{r1} и ω_{r2} ($\omega_{r2} > \omega_{r1}$). Запишем выражение для показателя преломления в следующем типичном виде:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega)\mu(\omega)$$

$$= 1 + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_{r1}^2 - 2i\omega_{d1}\omega - \omega^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega_{r2}^2 - 2i\omega_{d2}\omega - \omega^2}, \tag{4}$$

где параметры $\omega_{p1,2}$ с некоторой долей условности могут быть названы „плазменными частотами“. Пока нам не важно, диэлектрическая или магнитная проницаемости среды отвечают за ее резонансные свойства. Подчеркнем, что величины $\omega_{p1,2}^2$ не обязательно являются положительными. В активных средах (иначе говоря, в средах с инверсной населенностью) по крайней мере один из этих параметров отрицателен, т. е. соответствующая „плазменная частота" является мнимой величиной [1] (величины $\omega_{r1,2}$, $\omega_{d1,2}$ являются, разумеется, вещественными как в пассивных, так и в активных средах).

Рассмотрим случай, когда $\omega_{d1} = \omega_{d2} = 0$. После определения корней уравнения $n^2(\omega)\beta^2 = 1$ функция (3) может быть представлена в следующем виде:

$$s^2(\omega) = -\frac{1-\beta^2}{V^2}\,\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)}{(\omega^2-\omega_{r1}^2)(\omega^2-\omega_{r2}^2)}, \tag{5}$$

где

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_{r1}^2 + \omega_{r2}^2 - \alpha(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2) \mp \sqrt{Discr}\,\right], \tag{6}$$

$$\begin{aligned} Discr =\ & \left[\omega_{r1}^2 + \omega_{r2}^2 - \alpha(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)\right]^2 \\ & - 4\omega_{r1}^2\omega_{r2}^2 + 4\alpha(\omega_{p1}^2\omega_{r2}^2 + \omega_{p2}^2\omega_{r1}^2), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\alpha = \beta^2\left(1-\beta^2\right)^{-1}. \tag{8}$$

Величины $\omega_{1,2}^2$ вещественны, если $Discr > 0$. При этом нули $\omega_1^{\pm} = \pm\sqrt{\omega_1^2}$, $\omega_2^{\pm} = \pm\sqrt{\omega_2^2}$ являются либо чисто вещественными, либо чисто мнимыми (везде далее предполагается, что нули, снабженные индексом $(+)$, имеют неотрицательную вещественную часть, а если они чисто мнимые, то считается положительной их мнимая часть). Если же $Discr < 0$, то нули обладают как вещественными, так и мнимыми частями, причем $\omega_1^+ = -\omega_1^- = \overline{\omega_2^+} = -\overline{\omega_2^-}$, где чертой обозначена операция комплексного сопряжения. Определитель (7) можно представить также в следующих формах:

$$\begin{aligned} Discr &= \left[\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2 - \alpha(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)\right]^2 + 4\alpha\omega_{p1}^2(\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2) \\ &= \left[\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2 + \alpha(\omega_{p1}^2 + \omega_{p2}^2)\right]^2 - 4\alpha\omega_{p2}^2(\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2). \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $\omega_{r2} > \omega_{r1}$, то отсюда вытекает, что определитель $Discr$ положителен при любых параметрах задачи, если имеет место одна из следующих ситуаций:

$$\omega_{p1}^2 > 0, \ \ \omega_{p2}^2 > 0; \qquad \omega_{p1}^2 > 0, \ \ \omega_{p2}^2 < 0; \qquad \omega_{p1}^2 < 0, \ \ \omega_{p2}^2 < 0. \quad (10)$$

Отрицательной величина $Discr$ может быть только в случае

$$\omega_{p1}^2 < 0, \quad \omega_{p2}^2 > 0, \qquad (11)$$

т.е. при условии „активности“ нижнего резонанса и „пассивности“ верхнего. Однако данное условие является необходимым, но не достаточным. Нетрудно показать, что $Discr < 0$ тогда и только тогда, когда наряду с условиями (11) выполнены неравенства

$$\frac{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2}{\left(\omega_{p2} + |\omega_{p1}|\right)^2} < \alpha < \frac{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2}{\left(\omega_{p2} - |\omega_{p1}|\right)^2}, \qquad (12a)$$

которые эквивалентны неравенствам

$$\beta_{\min} < \beta < \beta_{\max}, \qquad \beta_{\substack{\min\\ \max}} = \sqrt{\frac{\omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2}{\left(\omega_{p2} \pm |\omega_{p1}|\right)^2 + \omega_{r2}^2 - \omega_{r1}^2}}. \qquad (12б)$$

Далее будем рассматривать наиболее интересный случай, когда условия (11) и (12) выполнены. Зависимость квадрата показателя преломления от частоты для такой ситуации показана на рис. 1. В рассматриваемой ситуации прямая β^{-2} не пересекает кривую $n^2(\omega)$, что связано с комплексностью нулей $\omega_{1,2}^{\pm}$ функции $s^2(\omega)$. Данные нули, наряду с резонансными частотами, являются точками ветвления подынтегральных функций (2). Вещественные положительные частоты излучаемых волн лежат в диапазонах $\omega_{r1} < \omega < \omega_{r2}$, где выполнено условие $n^2\beta^2 > 1$, т.е. $s^2(\omega) > 0$. Для этих волн должен выполняться принцип излучения Мандельштама, согласно которому групповая скорость $\mathbf{V}_g$ направлена от оси движения заряда, т.е. $V_{g\rho} = (ds/d\omega)^{-1} > 0$ (подчеркнем, что принцип излучения Зоммерфельда, накладывающий аналогичное ограничение на фазовую скорость, в среде с дисперсией, вообще говоря, не верен [13]). Поскольку $V_{g\rho} = 2s(ds^2/d\omega)^{-1}$, то в областях излучаемых вещественных частот должно выполняться правило $\operatorname{sgn} s(\omega) = \operatorname{sgn}(ds^2/d\omega)$. Нетрудно показать, что $ds^2/d\omega$ обращается в нуль в некоторой точке на отрезке $\omega_{r1} < \omega < \omega_{r2}$, равно как и в точке на симметричном отрезке $-\omega_{r2} < \omega < -\omega_{r1}$. В этих точках происходит

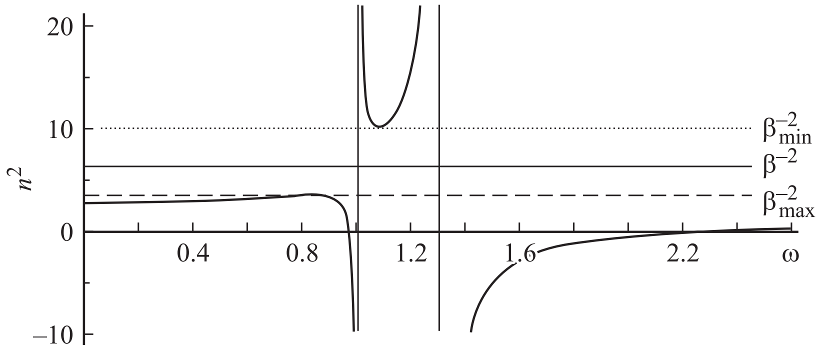

Рис. 1. Зависимость квадрата показателя преломления n^2 от частоты ω (в единицах ω_{r1}).

смена знака функции $s(\omega)$, т.е. функция терпит разрыв. Это возможно только в том случае, когда данные точки лежат на разрезе, отделяющем „физический“ лист римановой поверхности от „нефизического“.

Контур интегрирования должен обходить точки ветвления $\omega_{1,2}^{\pm}$ сверху, так как волновое поле заряда может существовать только в области за источником. Для компонент E_ρ, E_z также сверху должны обходиться и полюсы $\pm\omega_{s1,2}$, являющиеся нулями функции $\varepsilon(\omega)$ (они определяют „плазменный след“ в области за источником [11,14]). Отметим, что контур проходит между точками ветвления $\pm i\delta$ $(\delta \to +0)$ функции $\sqrt{\omega^2}$, входящей в $s(\omega)$. Исходящие из этих точек разрезы (рис. 2) определяют квазистатическое поле, как и в случае пассивной среды [14].

Качественно картина разрезов и контур интегрирования в правой полуплоскости показаны на рис. 2 (в левой полуплоскости контур симметричен относительно мнимой оси). Тот факт, что часть контура располагается в верхней полуплоскости, предопределяет усиление генерируемого излучения. В то же время легко убедиться, что вне области излучения подынтегральные функции (2) экспоненциально убывают по ρ, как и должно быть для местных волн.

Можно показать, что все интегралы для компонент поля по симметричному относительно мнимой оси контуру Γ можно свести к

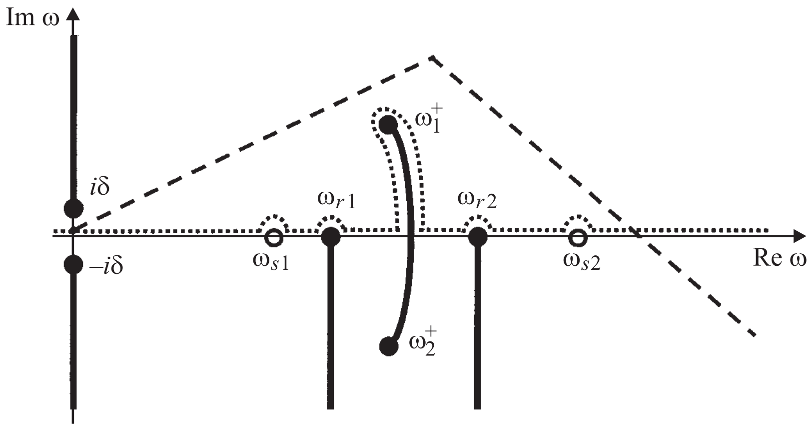

Рис. 2. Разрезы и контуры интегрирования в правой полуплоскости в режиме усиления. Сплошными жирными линиями показаны разрезы, точками — исходный контур интегрирования, пунктиром — трансформированный контур интегрирования.

интегралам по его правой половине Γ_+ по формуле

$$\int\limits_{\Gamma} f(\omega)d\omega = 2\int\limits_{\Gamma_+} \operatorname{Re}\big(f(\omega)d\omega\big)$$

(подчеркнем, что это правило верно и в случае, когда $\omega_{d1,2} \neq 0$). Поэтому далее мы будем рассматривать интегралы только по контуру Γ_+. Отметим, что нам не требуется точно определять геометрию разрезов, так как можно трансформировать контур интегрирования Γ_+ таким образом, чтобы он располагался вдали от особенностей подынтегрального выражения. К примеру, для поля в полупространстве за зарядом ($\xi < 0$) исходный контур удобно заменить ломаной линией, обходящей полюса и точки ветвления „сверху“ и параллельной асимптоте контура наибыстрейшего спуска на бесконечности, как показано на рис. 2 (в случае пассивной среды этот метод использовался в [14]). Такая трансформация позволяет избежать вычисления интегралов в окрестности точек ветвления и обеспечивает хорошую сходимость на бесконечности. Подобный контур оказался весьма удобен для проведения численных расчетов, результат которых показан на рис. 3. Отметим, что при расчетах

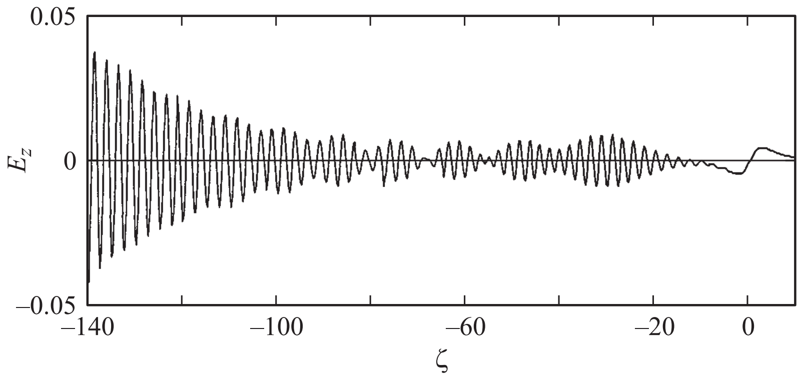

Рис. 3. Зависимость продольной компоненты электрического поля E_z (в единицах $q\omega_{r1}^2 c^{-2}$) от координаты ξ (в единицах $c\omega_{r1}^{-1}$) при $\rho = 5 \cdot c\omega_{r1}^{-1}$ для рубина: $\omega_{r1} = 2\pi \cdot 11\,\mathrm{THz}$, $\omega_{r2} = 2\pi \cdot 14\,\mathrm{THz}$, $\omega_{p1} = 2\pi \cdot 1.3i\,\mathrm{THz}$, $\omega_{P2} = 2\pi \cdot 21\,\mathrm{THz}$, $\omega_{d1} = 2\pi \cdot 0.02\,\mathrm{THz}$, $\omega_{d2} = 2\pi \cdot 0.06\,\mathrm{THz}$.

учитывались ненулевые значения параметров ω_{d1} и ω_{d2} (описанный алгоритм позволяет это сделать).

В качестве примера среды, обладающей дисперсией вида (4), был рассмотрен рубин, имеющий два относительно близких резонанса в терагерцовом диапазоне частот. Естественно, в такой среде заряд может двигаться с относительно постоянной скоростью только в вакуумном канале. Однако известно, что наличие канала практически не сказывается на ИВЧ, если рассматриваемые длины волн существенно больше толщины канала [9–11]. Благодаря этому основные закономерности можно проиллюстрировать, используя полученные выше результаты. Параметры модели $\omega_{p1,2}$, $\omega_{r1,2}$, $\omega_{d1,2}$ для рубина в пассивном режиме определялись на основе известных спектральных характеристик [15] путем интерполяции. При этом полагалось, что в активном режиме величина $|\omega_{p1}^2|$ в сто раз меньше, чем в пассивном. В такой ситуации оказалось, что $\beta_{\min} = 0.38$, $\beta_{\max} = 0.42$. Несмотря на весьма незначительную инверсию нижнего резонанса, в случае $\beta = 0.4$ имеет место выраженное усиление излучения Вавилова–Черенкова (рис. 3). Аналогичный эффект должен иметь место для любых активных сред с двумя резонансными частотами при выполнении описанных в настоящей работе условий.

Авторы признательны В.В. Новикову и И.А. Чехонину за полезные обсуждения.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 06-02-16442-а и грантом SBIR DoE N DE-FG02-05ER84355.

Список литературы

[1] *Schachter L.* // Physical Review E. 2000. V. 62. P. 1252–1257.
[2] *Иванов Н.В., Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 10. С. 68–75.
[3] *Power J.G., Conde M.E., Gai W.* et al. // Phys. Rev. Special Topics—Accelerators and Beams. 2000. V. 3. P. 101302-1–7.
[4] *Варданян А.С., Оксузян Г.Г.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. В. 4. С. 76–80.
[5] *Альтмарк А.М., Канарейкин А.Д., Шейман И.Л.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 1. С. 89–97.
[6] *Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 14. С. 68–74.
[7] *Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 4. С. 37–43.
[8] *Kanareykin A.D., Tyukhtin A.V.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. A. 2006. V. 558. N 1. P. 62–65.
[9] *Франк И.М.* Излучение Вавилова—Черенкова. М.: Наука, 1988.
[10] *Зрелов В.П.* Излучение Вавилова—Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1, 2. М., 1968.
[11] *Болотовский Б.М.* // Успехи физ. наук. 1957. Т. 62. В. 3. С. 201–246.
[12] *Тюхтин А.В.* Электромагнитное излучение заряженной частицы, движущейся в изотропной среде. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004.
[13] *Болотовский Б.М., Столяров С.Н.* // Проблемы теоретической физики. Сборник памяти И.Е. Тамма. М.: Наука, 1972. С. 267.
[14] *Галямин С.Н., Тюхтин А.В.* // Вестник СПбГУ. Сер. 4. 2006. В. 1. С. 21–30.
[15] *Сидорович А.М.* Программа для расчета и моделирования спектральных свойств вещества в широком диапазоне частот. http://spectra.at.tut.by