01

Самосогласованная теория турбулентности

© *С.А. Ктиторов*

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург
E-mail: ktitorov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 23 января 2007 г.

Предложена самосогласованная версия стохастической теории турбулентности. Случайная сторонняя сила в стохастическом уравнении Навье–Стокса рассматривается как динамическая переменная, управляемая нелинейным уравнением типа уравнения Гинзбурга–Ландау с белым шумом. Уравнения такого типа используют для описания пороговых явлений. Обратная связь осуществляется благодаря зависимости члена, нарушающего симметрию в уравнении Гинзбурга–Ландау от числа Рейнольдса, которое определено как функционал поля скоростей.

PACS: 47.27.Ak, 47.27.ef

Один из конструктивных подходов к теории турбулентности основан на некоторой формальной аналогии с динамикой фазовых переходов [1,2]. Динамические флуктуации описываются при этом стохастическими дифференциальными уравнениями. Стохастическое уравнение Навье–Стокса записывают в виде

$$\rho\nabla_t v_i(x) = \nu\nabla^2 u_i(x) - \partial_i p(x) + \varepsilon_i(x), \tag{1}$$

где $\nabla_t \equiv \partial_t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)$, ρ_i — массовая плотность, v_i — поперечное векторное поле скоростей; $\mathrm{div}\mathbf{v} \equiv 0$; ν — кинематическая вязкость; $p(x)$ — давление. Случайная плотность сил ε_i не подчинена здесь флуктуационно-диссипационной теореме, и ее коррелятор не имеет дельта-функционного вида. Следующая форма коррелятора обычно предполагается

$$\left\langle \xi_i(\mathbf{r},t)\xi_j(\mathbf{r}',t')\right\rangle = P_{ij}D(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t'); \tag{2}$$

поперечный проектор $P_{ij} = (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2})$ появляется в случае несжимаемой жидкости, что здесь подразумевается. Нулевая величина времени корреляции не является, вообще говоря, необходимой. Пространственный коррелятор удобно представить в виде интеграла Фурье

$$D(\mathbf{r}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{kr}) N(\mathbf{k}), \tag{3}$$

где d — размерность пространства, $N(\mathbf{k})$ — функция накачки. Основываясь на идеях Колмогорова, эту функцию обычно выбирают так, что накачка является существенно инфракрасной. Наиболее популярны следующие две формы накачки:

$$N(\mathbf{k}) = \frac{D_0 k^{4-d}}{(k^2 + m^2)^\epsilon} \tag{4}$$

и

$$N(\mathbf{k}) = D_0 k^{4-d-2\epsilon}, \tag{5}$$

где ϵ — формальный параметр; теория является логарифмической при $\epsilon = 0$.

Такая модель турбулентности обладает, с нашей точки зрения, следующими недостатками. Во-первых, вид коррелятора определяется произвольным образом, исходя из желания получить ожидаемые результаты; во-вторых, нелокальный характер коррелятора случайных сил ведет к серьезным методическим проблемам, характерным для любой нелокальной теории поля; в-третьих, в такой системе нет обратной связи, т. е. интенсивность случайных сил не зависит от состояния поля скоростей. Наша задача как раз и состоит в преодолении этих недостатков традиционного подхода.

Принимая во внимание аргументацию в пользу традиционного подхода, мы задаемся вопросом: каким образом необходимый окрашенный шум $\xi(\mathbf{r}, t)$ с коррелятором $D(\mathbf{r}, t)$ может быть генерирован в системе хотя бы на феноменологическом по отношению к уравнению Навье–Стокса уровне? Мы постулируем следующее уравнение:

$$\gamma \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} - \alpha \Delta \xi_i + \beta[\mathbf{v}]\xi_i + \delta \xi_j \xi_j \xi_i = \eta_i, \tag{6}$$

где $\eta(x)$ — это случайная сила, которая предполагается гауссовой с коррелятором

$$\langle \eta_i(x) \eta_j(x') \rangle = 2D\delta(x - x'), \tag{7}$$

где D — интенсивность шума; $\delta(x) = \delta(\mathbf{r})\delta(t)$; $\beta[\mathbf{v}]$ — некоторый функционал поля скоростей. Вид этого функционала диктуется неоходимостью генерации цветного шума в уравнении Навье–Стокса и может быть выбран основываясь на физических соображениях. Прежде всего, мы выбираем локальную форму этого функционала, что позволяет сохранить локальность теории в целом. $\beta[\mathbf{v}]$ — это, вообще говоря, функционал распределения скоростей. Он обеспечивает обратную связь: распределение интенсивности флуктуаций скорости влияет на процесс генерации шума. Мы выбрали следующую форму:

$$\beta[\mathbf{v}] = \beta' \, \frac{R_c^2 - R^2}{R^c}. \tag{8}$$

Здесь R и R_c – локальное и пороговое числа Рейнольдса соответственно. При малых числах Рейнольдса мы можем пренебречь нелинейным членом; тогда мы получаем стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение накачки), преобразующее гауссов белый шум η в гауссов окрашенный шум ξ:

$$\gamma \, \frac{d\xi_i}{dt} - \alpha\Delta\xi_i + \xi_i = \eta_i. \tag{9}$$

Если α и γ достаточно малы, шум накачки ξ остается практически бесцветным подобно равновесному η. Заметим, что такое уравнение может быть полезным инструментом для того, чтобы избежать нелокальности, вызванной окрашенностью шума в стандартной модели (1). Оно заменяет затравочный белый шум η на сильный окрашенный шум. Для того чтобы получить уравнение накачки, которое имеет в качестве решения окрашенный шум с коррелятором (5) или (4), мы должны заменить лапласиан в уравнении накачки на уравнение с дробным лапласианом [3–5]. Мы принимаем $\gamma = 0$ для того, чтобы получить белый временнóй спектр, как это обычно принимают в теории турбулентности. Когда R^2 приближается к R_c^2, мы больше не можем пренебрегать окрашиванием и нелинейностью, поэтому мы должны вернуться к (6). Шум накачки становится негауссовым и окрашенным. Нелинейность такого вида была введена в теорию турбулентности Л.Д. Ландау [6] при описании порогового поведения комплексных амплитуд:

$$\frac{d|A|^2}{dt} = a|A|^2 - b|A|^4. \tag{10}$$

Это уравнение, очевидно, эквивалентно (для действительных a и b) зависящему от времени уравнению Гинзбурга–Ландау (без пространственных производных):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{a}{2}A - \frac{b}{2}|A|^2. \tag{11}$$

Наше уравнение (6) отличается главным образом присутствием случайной силы η и лапласиана. Однако имеется еще одна работа по теории турбулентности, в которой было введено уравнение Гинзбурга–Ландау — на этот раз для рейнольдсовского тензора напряжений. Это работа Д.Н. Зубарева с соавторами [7]. С учетом сказанного выше мы можем записать уравнение накачки в виде

$$-\alpha\Delta^\epsilon\xi_i + \beta\,\frac{v_c^2 - v^2}{v^c}\,\xi_i + \delta\xi_j\xi_j\xi_i = \eta_i, \tag{12}$$

где Δ^ϵ — дробный лапласиан [5]. Окончательное заключение относительно формы этого уравнения может быть сделано только в результате последовательного вывода из уравнения Навье–Стокса. Сформулированные уравнения могут быть проанализированы методом ренормализационной группы [2]. Однако сейчас ограничимся качественными соображениями относительно того, как происходит преобразование белого шума $\eta(x,t)$ нелинейной системой (6). Уравнение (6) известно в теории стохастического резонанса в распределенных системах [8]. В отсутствие регулярного сигнала это уравнение описывает случайные прыжки через барьер, разделяющий потенциальные ямы. Корреляционные функции для такого процесса хорошо изучены [8]. Нам остался последний шаг здесь — написать стохастический интеграл по путям и соответствующее эффективное действие:

$$Z[j_{\xi_i}, j_{v_i}] = \int D\eta DDvD\psi_1 D\psi_2 \exp\left[-S_{eff}\{\eta,\xi,v,\psi_1,\psi_2\}\right], \tag{13}$$

$$S_{eff}\{\eta,\xi,v,\psi_1,\psi_2\} = \int d^dx\psi_1\left[\rho\nabla_t v_i(x) - \nu\nabla^2 v_i(x) - \xi_i(x)\right]$$
$$+\int d^dx\psi_2\Big[-\alpha\Delta^\epsilon\xi_i + \beta\,\frac{v_c^2-v^2}{v^c}\,\xi_i + \delta\xi_j\xi_j\xi_i - \eta_i + \frac{1}{2}\eta_i(\mathbf{r})P_{ij}D\eta_j(\mathbf{r})\Big],$$

где D — интенсивность неперенормированного шума; ψ_1, ψ_2 — стохастические вспомогательные поля.

В заключение отметим, что мы предложили новую модель для описания развитой турбулентности, достоинствами которой являются локальность и наличие обратной связи.

Список литературы

[1] *Verma M.* ArXiv: nlin. CD/0510069, 2005.
[2] *Васильев А.Н.* Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: изд-во ПИЯФ, 1998.
[3] *Форстер Д.* Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции. М.: Атомиздат, 1980.
[4] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
[5] *Tarasov V.E., Zaslavsky G.M.* // Physica A. 2005. V. 354. P. 249.
[6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука ФМ, 1986.
[7] *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* // ТМФ. 1992. Т. 92. С. 293.
[8] *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* // J. Phys. A. 1985. V. 18. P. 2239.