

Переमेжающаяся обобщенная синхронизация в распределенных автоколебательных средах на примере комплексных уравнений Гинзбурга—Ландау

© П.В. Попов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: popovpv@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 28 февраля 2007 г.

Обнаружено возникновение перемежающегося поведения на границе обобщенной синхронизации распределенных автоколебательных систем, описываемых уравнениями Гинзбурга—Ландау, находящихся в режиме пространственно-временного хаоса. Установлен тип возникающей перемежающейся обобщенной синхронизации.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

Синхронизация является одним из важнейших фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в настоящее время [1,2]. Особый интерес вызывает исследование явления синхронизации связанных осцилляторов, демонстрирующих хаотическую динамику [2]. Одной из важных проблем исследования явления синхронизации хаотических колебаний является изучение перехода от асинхронного к синхронному состоянию в связанных хаотических системах, которые часто сопровождаются перемежающимся поведением [3–7]. Так, на границе возникновения лаг-синхронизации был обнаружен режим существования перемежающейся лаг-синхронизации [4,5], когда имеет место чередование синхронной и асинхронной динамики. Подобное поведение было обнаружено и на границе обобщенной синхронизации, это явление было названо перемежающейся обобщенной синхронизацией [6]. Также наблюдаются различные типы перемежающегося поведения на границе фазовой синхронизации [3–7]. Следует отметить, что все типы перемежающегося поведения на границах синхронных режимов были обнаружены для эталонных динамических систем с малым числом степеней

свободы (в первую очередь, для осцилляторов Ресслера и Лоренца, а также отображений). Однако совершенно не исследованы переходы от асинхронного поведения к режимам синхронизации в пространственно распределенных автоколебательных системах различной природы, хотя в настоящее время анализ синхронных режимов в распределенных хаотических системах вызывает значительный интерес.

Поэтому в данной работе исследуется сценарий перехода к обобщенной синхронизации [8,9] в пространственно распределенных средах на примере системы однонаправленно связанных комплексных уравнений Гинзбурга–Ландау, находящихся в режимах пространственно-временных хаотических колебаний. Выбор такой модели связан с тем, что комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау является хорошо изученной распределенной системой с хаотической динамикой и часто используется в качестве базовой модели для исследования различных явлений в распределенных средах [9–12]. Кроме того, в связанных распределенных системах, описываемых уравнением Гинзбурга–Ландау, были ранее обнаружены режимы обобщенной хаотической синхронизации [9,13].

Исследуемая математическая модель распределенных автоколебательных сред представляет собой систему двух однонаправленно связанных одномерных уравнений Гинзбурга–Ландау относительно комплексных полей $u(x, t)$ и $v(x, t)$ [14]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u|^2u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v - (1 - i\alpha_r)|v|^2v + (1 + i\beta_r)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon(u - v), \quad x \in [0, L] \quad (2)$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x, t) = u(x + L, t), \quad v(x, t) = v(x + L, t), \quad (3)$$

где L — пространственный период системы.

Уравнение (1) описывает ведущую (автономную систему), а уравнение (2) — ведомую распределенную систему, $\alpha_d = 4$, $\beta_d = 3.88$, $\alpha_r = 4$, $\beta_r = 4$ — управляющие параметры, ε — параметр однонаправленной диссипативной связи между системами, $L = 40\pi$ — пространственная длина системы. Уравнения интегрировались с помощью явной численной схемы с параметрами $\Delta t = 0.0002$, $\Delta x = L/1024$, начальные условия

задавались случайным образом. В течение длительного переходного процесса системы оставались несвязанными.

Обобщенная синхронизация [8,9], вводимая в рассмотрение для однонаправленно связанных хаотических систем, означает, что между векторами состояний ведущей $\mathbf{u}(x, t)$ и ведомой $\mathbf{v}(x, t)$ систем после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость $\mathbf{v}(x, t) = F[\mathbf{u}(x, t)]$. Вид этой функциональной зависимости может быть очень сложным, и в большинстве случаев ее явный вид найти не удастся. Для установления наличия режима обобщенной синхронизации воспользуемся методом вспомогательной системы [15]. Согласно этому методу, введем в рассмотрение вспомогательную систему $v_a(x, t)$, полностью идентичную ведомой системе (2), но стартующую с отличных начальных условий. В случае отсутствия обобщенной синхронизации (при малых значениях параметра связи ε) движения ведомой и вспомогательной систем v и v_a будут принадлежать одному аттрактору, но будут неидентичными. При увеличении параметра связи ε в режиме обобщенной синхронизации в силу выполнения соотношений $v(x, t) = F[u(x, t)]$ и $v_a(x, t) = F[u(x, t)]$ колебания в ведомой и вспомогательной системах должны стать идентичными $v(x, t) \cong v_a(x, t)$. Таким образом, эквивалентность колебаний в ведомой и вспомогательной системах является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущей и ведомой системами.

Рассмотрим динамику связанной системы при увеличении параметра связи ε . При малых параметрах связи между системами (1) и (2) режим обобщенной синхронизации отсутствует. Увеличение параметра связи, как было показано в [9,13], с одной стороны, сопровождается увеличением диссипации в ведомой системе, а с другой — ростом амплитуды внешнего воздействия, в результате чего при некотором ε_c устанавливается режим обобщенной синхронизации.

Режим обобщенной синхронизации возникает следующим образом: при малых ε , когда существенна собственная хаотическая динамика ведомой системы (2), обобщенная синхронизация отсутствует. При увеличении параметра связи возникают интервалы времени, в течение которых наблюдается режим обобщенной синхронизации, т.е. выполняется функциональное соотношение между состояниями ведущей и ведомой систем $v(x, t) \cong F[u(x, t)]$. В остальные моменты времени режим обобщенной синхронизации отсутствует. Таким образом, в связанной системе наблюдается перемежающееся поведение, когда промежутки

времени, в которых имеет место обобщенная синхронизация (будем называть их ламинарными фазами), перемежаются интервалами времени, когда в системе наблюдаются асинхронные режимы (турбулентные фазы). Будем по аналогии с работой [6] называть данный режим режимом перемежающейся обобщенной синхронизации в пространственно распределенной системе. С увеличением параметра связи средняя длительность ламинарных фаз увеличивается, а турбулентных фаз — уменьшается.

Выделение турбулентных и ламинарных фаз возможно с помощью вышеописанного метода вспомогательной системы. Рассмотрим усредненную по пространству разность состояний

$$\delta(t) = \int_0^L |v(x, t) - v_a(x, t)| dx$$

между ведомой и вспомогательной системами. Для ламинарных фаз выполняется соотношение $\delta(t) \cong 0$. Для турбулентных — $\delta(t) \neq 0$. На рис. 1 приведены пространственно-временные диаграммы разности состояний ведомой и вспомогательной систем $|v(x, t) - v_a(x, t)|$, а также зависимость величины $\delta(t)$ для различных значений параметра ε , соответствующих режиму перемежающейся обобщенной синхронизации. Критическое значение параметра связи, соответствующее установлению режима обобщенной синхронизации при вышеуказанных параметрах, $\varepsilon_c \approx 0.53$. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ в связанной системе наблюдается режим обобщенной синхронизации, когда в системе не возникает турбулентных всплесков.

Временные интервалы, соответствующие светлым областям на рис. 1 (ламинарные фазы в движении связанной системы (1) и (2)), свидетельствуют о наличии режима обобщенной синхронизации, и для этих областей выполняется соотношение $\delta(t) \cong 0$. В эти моменты времени вектора состояний ведомой и вспомогательной систем совпадают друг с другом $v(x, t) \sim v_a(x, t)$. Темные области соответствуют турбулентным фазам, в течение которых обобщенная синхронизация отсутствует. Следует отметить, что в течение турбулентных фаз величина $|v(x, t) - v_a(x, t)|$ сравнима с амплитудой колебаний в автономном уравнении Гинзбурга–Ландау.

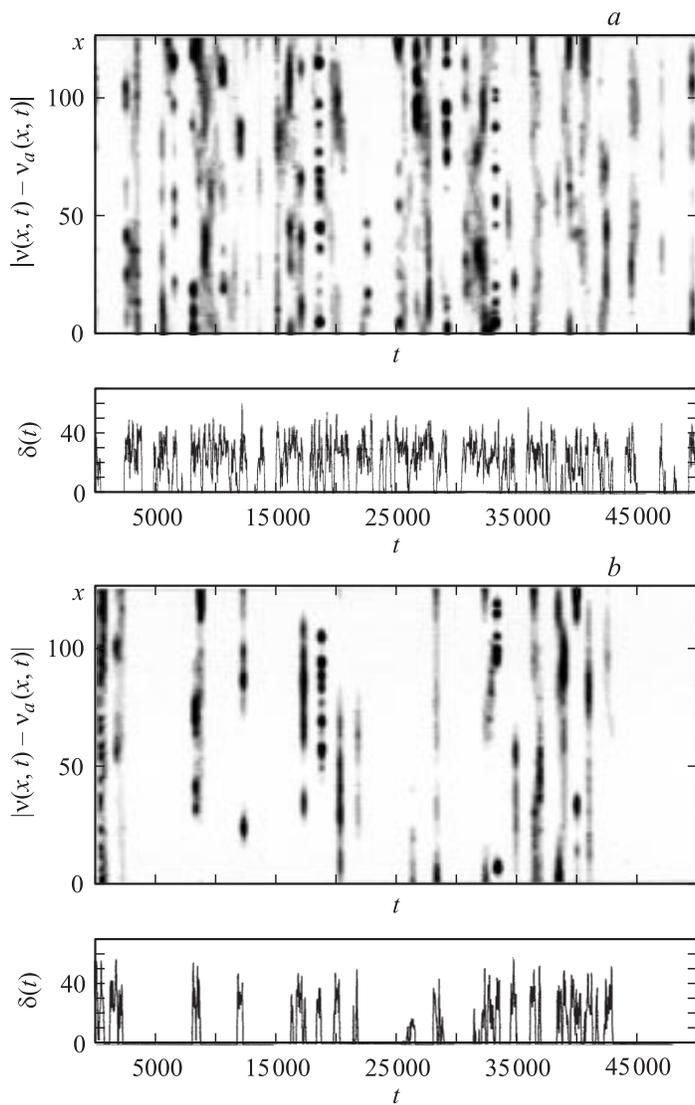


Рис. 1. Пространственно-временные диаграммы разности $|v(x, t) - v_a(x, t)|$, а также величина $\delta(t)$ для различных параметров связи (a — $\varepsilon = 0.48$, b — $\varepsilon = 0.49$).

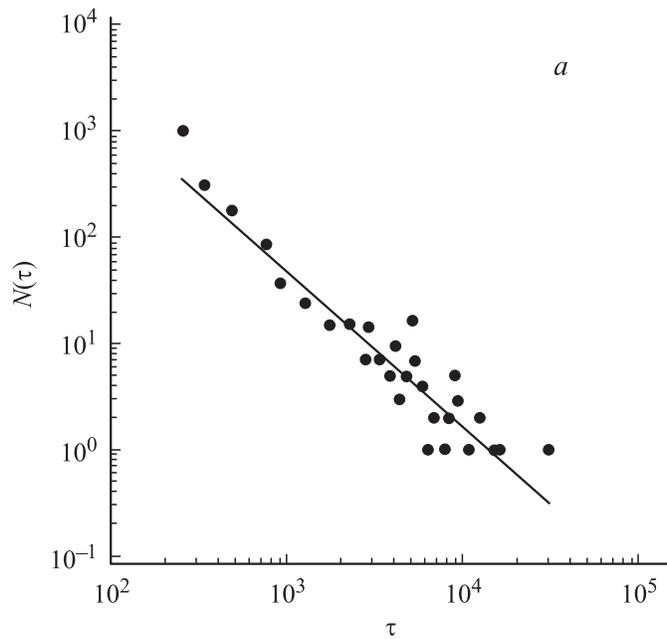


Рис. 2. *a* — статистическое распределение длительности ламинарных фаз $N(\tau)$ и аппроксимация степенным законом $N(\tau) \sim \tau^{-3/2}$ в двойном логарифмическом масштабе. Параметр связи между системами $\varepsilon = 0.48$. Величина отсечки $\Delta = 0.1$. *b* — статистическое распределение средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ в зависимости от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ и ее аппроксимации $\langle \tau \rangle \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1}$. Критическое значение $\varepsilon_c = 0.53$.

Выясним, к какому типу перемежающегося поведения относится перемежающаяся обобщенная синхронизация. Для анализа статистических свойств перемежающегося поведения будем исследовать распределение $N(\tau)$ длительности ламинарных фаз τ , а также зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_c)$.

Численно построенное распределение длительности ламинарных фаз для величины коэффициента связи $\varepsilon = 0.48$ приведено на рис. 2, *a*. Анализ методом наименьших квадратов показал, что распределение

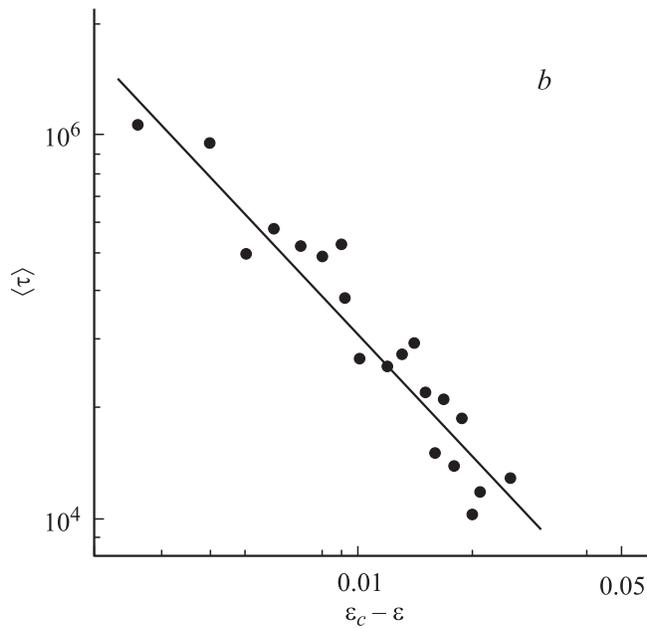


Рис. 2 (продолжение).

хорошо аппроксимируется степенной зависимостью $N(\tau) \sim \tau^\alpha$ с показателем степени $\alpha = -3/2$. Степенной характер распределения длительностей ламинарных фаз с показателем $-3/2$ позволяет предположить, что на границе обобщенной синхронизации в связанных распределенных хаотических системах наблюдается режим on-off перемежаемости, хорошо описанный в литературе [16–18].

Для подтверждения данного предположения рассмотрим зависимость распределения средней длительности ламинарных фаз $\langle \tau \rangle$ от параметра надкритичности $(\varepsilon - \varepsilon_c)$. На рис. 2, *b* приведено численно полученное распределение средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности для исследуемой системы. Видно, что степенной закон $\langle \tau \rangle \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^\gamma$ с показателем степени $\gamma = -1$ хорошо аппроксимирует полученное распределение. Последнее также характерно для on-off перемежаемости [16,17].

Таким образом, в работе впервые обнаружено возникновение перемежающегося поведения на границе обобщенной синхронизации (перемежающейся обобщенной синхронизации) в пространственно распределенных хаотических системах на примере уравнений Гинзбурга–Ландау. Было показано, что подобное перемежающееся поведение на границе обобщенной синхронизации в связанных распределенных системах классифицируется как режим on-off перемежаемости. Заметим, что режимы on-off перемежаемости были получены ранее при анализе перемежающегося поведения на границе лаг- и обобщенной синхронизации двух связанных слабонеидентичных хаотических систем с малым числом степеней свободы (осцилляторов Ресслера) [4,6].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-02-16273), президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ 4167.2006.2) и НОЦ СГУ (CRDF REC-006).

Список литературы

- [1] *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981.
- [2] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [3] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 47–50.
- [4] *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. N 5. P. 7497–7500.
- [5] *Zhan M., Wei G.W., Lai C.H.* // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 036 202.
- [6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhysics Lett. 2005. V. 70. N 2. P. 169–175.
- [7] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccalletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114 101.
- [8] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 2. P. 980–994.
- [9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 72. N 3. P. 037 201.
- [10] *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.T.* // Physics Reports. 2002. V. 366. P. 1.
- [11] *Kocarev L., Tasev Z., Stojanovski T., Parlitz U.* // Chaos. 1997. V. 7. N 4. P. 635–643.
- [12] *Boccaletti S., Bragard J., Arecchi F.T., Mancini H.* // Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. N 3. P. 536–539.

- [13] Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е. // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 4. С. 748–764.
- [14] Aranson I.S., Kramer L. // Reviews of Modern Physics. 2002. V. 74. P. 99–143.
- [15] Abarbanel H.D., Rulkov N.F., Sushchik M.M. // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. N 5. P. 4528–4535.
- [16] Platt N., Spiegel E.A., Tresser C. // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. N 3. P. 279–282.
- [17] Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. N 2. P. 1140–1150.
- [18] Hammer P.W., Platt N., Hammel S.M., Heagy J.F., Lee B.D. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. N 8. P. 1095–1098.