

09

## **Переход к фазовой синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой**

© *О.И. Москаленко*

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского  
E-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru

*Поступило в Редакцию 24 января 2007 г.*

Исследовано перемежающееся поведение вблизи границы фазовой синхронизации при воздействии внешнего хаотического сигнала на автоколебательную систему с периодической динамикой. Показано, что в этом случае имеет место тот же самый сценарий, что и в случае взаимодействия двух связанных хаотических осцилляторов.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Xt

Перемежающееся поведение характерно для систем различной природы и является универсальным явлением. В частности, перемежаемость является одним из классических сценариев при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1–3]. При этом сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При увеличении управляющего параметра турбулентные всплески становятся все более частыми до тех пор, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультипликаторами предельного цикла) различают перемежаемость типов I–III [4].

Перемежающееся поведение наблюдается также вблизи границ различных режимов хаотической синхронизации, в связи с чем выделяют перемежающуюся фазовую [5,6], перемежающуюся обобщенную [7] синхронизацию и перемежающуюся синхронизацию с запаздыванием [8]. Для перемежающегося поведения существует определенная классификация. Переход к обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием характеризуется как перемежаемость on–off

типа [7,8]; при переходе к фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки управляющих параметров имеет место либо перемежаемость типа I и так называемая перемежаемость „игольного ушка“ (eyelet intermittency) [5,9], либо перемежаемость „кольца“ (ring intermittency) [6].

В последнее время внимание исследователей направлено на изучение перемежающегося поведения вблизи границы возникновения фазовой синхронизации (см., например, [5,6,9–11]). Для диагностики фазовой синхронизации [12–14] традиционно вводят в рассмотрение фазу  $\varphi_{1,2}(t)$  сигналов взаимодействующих осцилляторов (или фазы сигнала осциллятора и внешнего воздействия) и говорят о ее наличии в том случае, если выполняется условие захвата фаз:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < \text{const}. \quad (1)$$

Вблизи порога возникновения фазовой синхронизации наблюдается перемежающееся поведение. В этом случае зависимость разности фаз от времени характеризуется наличием участков синхронного поведения (ламинарных фаз), прерываемых внезапными скачками, когда значения разности фаз меняются на величину  $2\pi$  (турбулентные фазы).

При определении сценариев перехода к режиму фазовой синхронизации играет роль статистика длительностей ламинарных фаз. В случае малых значений частотной расстройки она является различной для систем с периодической и хаотической динамикой. В частности, в случае связанных или вынужденных колебаний осцилляторов, демонстрирующих периодическое поведение, переходу к фазовой синхронизации соответствует седло-узловая бифуркация, а распределение средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности подчиняется степенному закону с показателем степени „ $-1/2$ “, который имеет место в случае перемежаемости типа I [4,11]:

$$\langle l \rangle \sim |P - P_c|^{-1/2}, \quad (2)$$

где  $P$  — сила связи или частота внешнего сигнала,  $P_c$  соответствует точке перехода к режиму фазовой синхронизации.

Для хаотических систем ситуация несколько меняется. И в случае воздействия внешнего гармонического сигнала на хаотический осциллятор, и в случае взаимных колебаний хаотических систем степенной закон, имеющий место при перемежаемости типа I, выполняется только

в ограниченной области по параметру надкритичности, вдали от точки перехода к режиму фазовой синхронизации, в то время как вблизи нее ламинарные фазы становятся очень длинными, а их распределение подчиняется закону

$$\langle l \rangle \sim \exp(k|P - P_c|^{-1/2}), \quad (3)$$

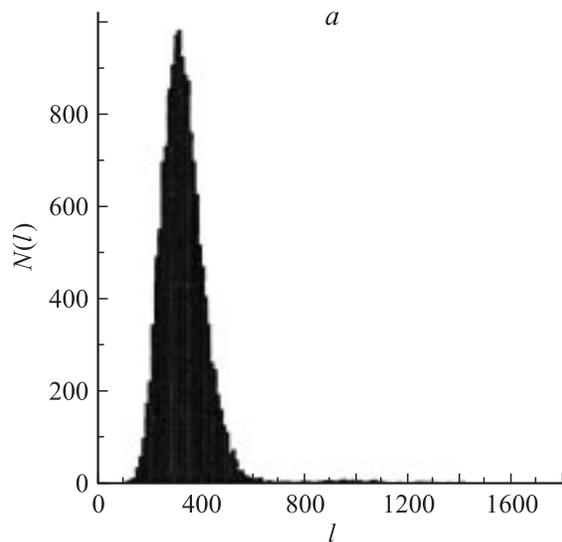
где  $k$  — некоторая константа. Такой тип перемежаемости был назван в работе [5] перемежаемостью „игольного ушка“.

Таким образом, для систем, демонстрирующих хаотическое поведение, независимо от характера внешнего сигнала, периодический он или хаотический, переход к фазовой синхронизации сопровождается последовательностью двух типов перемежаемости. Для систем с периодической динамикой известно лишь о наличии перемежаемости типа I в случае воздействия на них внешнего гармонического сигнала. В то же самое время влияние внешнего хаотического сигнала на перемежающееся поведение таких систем до сих пор исследовано не было. Представляется интересным вопрос о том, какие типы перемежаемости наблюдаются в этом случае? Оказывает ли вообще влияние характер внешнего сигнала на сценарии перехода к режиму хаотической фазовой синхронизации? Или они обусловлены только динамикой самой (ведомой) системы?

Для ответа на эти вопросы проведем исследование классического автогенератора Ван-дер-Поля под внешним хаотическим воздействием со стороны системы Ресслера:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(-\omega y - z), \\ \dot{y} &= \alpha(\omega x + ay), \\ \dot{z} &= \alpha(p + z(x - c)), \\ \ddot{u} - (\lambda - u^2)\dot{u} + u &= \varepsilon(Dy - \dot{u}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$  и  $c = 10$  — управляющие параметры системы Ресслера,  $\omega = 0.9689$  характеризует собственную частоту колебаний в этой системе,  $\lambda = 0.1$  — единственный управляющий параметр в автогенераторе Ван-дер-Поля, параметр  $\alpha$  введен для того, чтобы изменить характерный временной масштаб колебаний в системе Ресслера (по аналогии с [15]),  $D = 0.0664$  выбран таким образом, чтобы амплитуды



**Рис. 1.** Распределения длительностей ламинарных фаз  $N(l)$  (*a*) вдали ( $\varepsilon = 0.01$ ) и (*b*) вблизи ( $\varepsilon = 0.02$ ) границы фазовой синхронизации. Во втором случае вертикальная ось приведена в логарифмическом масштабе. Сплошная линия — экспоненциальная функция с показателем  $-0.0004$ . Видно, что вдали от области синхронизации распределение является гауссовым, а вблизи нее подчиняется экспоненциальному закону.

компонент фурье-спектров автогенератора Ван-дер-Поля и внешнего сигнала в автономном режиме примерно совпадали,  $\varepsilon$  характеризует величину связи между системами. При выбранных значениях управляющих параметров и  $\alpha = 1$  основные частотные компоненты в фурье-спектрах систем Ресслера и Ван-дер-Поля совпадают, что соответствует нулевой расстройке частот между взаимодействующими системами. Выберем  $\alpha = 0.99$ , чтобы задать слабую расстройку осцилляторов, и исследуем, как происходит переход к фазовой синхронизации в такой системе.

Величина параметра связи, соответствующая порогу возникновения режима фазовой синхронизации в системе (4) при выбранных значениях управляющих параметров, равна  $\varepsilon_c = 0.023$ . При  $\varepsilon < \varepsilon_c$  режим хаотической фазовой синхронизации разрушается, в системе наблюдается

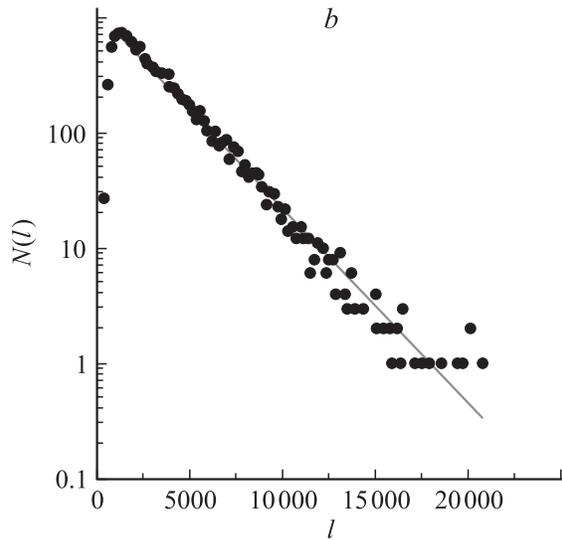
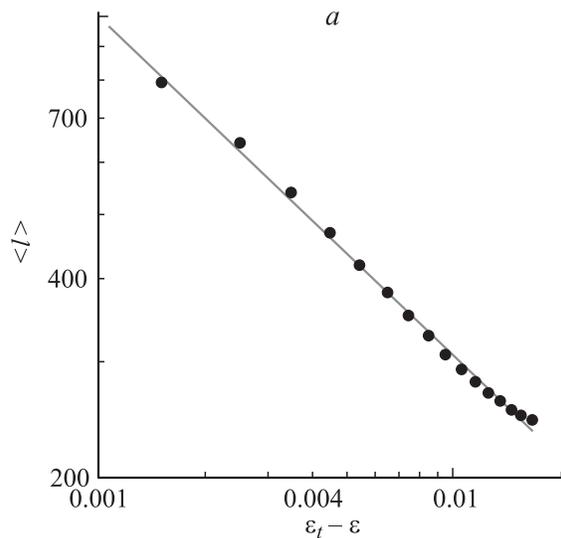


Рис. 1 (продолжение).

перемежающееся поведение. Чтобы определить тип перемежаемости, по аналогии с [9] перейдем к анализу статистических характеристик длительностей ламинарных фаз  $l$  вблизи и вдали от  $\varepsilon_c$ . На рис. 1 приведены распределения длительностей ламинарных фаз  $N(l)$  при  $\varepsilon = 0.01$  ( $a$ ) и  $\varepsilon = 0.02$  ( $b$ ). Число анализируемых фаз в обоих случаях примерно составило 10 000.

Вдали от области синхронизации длительность ламинарных фаз практически не меняется. В этом случае распределение напоминает гауссово (рис. 1,  $a$ ). Можно предположить, что при достаточно слабой связи в системе (4) имеет место перемежаемость типа I. Вблизи границы фазовой синхронизации, как и в случае двух связанных хаотических осцилляторов (см., например, [9]), ламинарные фазы становятся очень длинными, причем их длительность меняется с течением времени достаточно сильно. Как видно из рис. 1,  $b$  такое распределение подчиняется экспоненциальному закону. В этом случае имеет место перемежаемость „игольного ушка“ [9].

Теперь рассмотрим, как меняется средняя длительность ламинарных фаз при изменении параметра связи  $\varepsilon$  между системами. На рис. 2



**Рис. 2.** Распределения средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности: *a* —  $\langle l \rangle$  от  $(\varepsilon_t - \varepsilon)$ , график построен в двойном логарифмическом масштабе, и *b* —  $\ln \langle l \rangle$  от  $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$ . Сплошные линии соответствуют теоретическим зависимостям  $\langle l \rangle \sim (\varepsilon_t - \varepsilon)^{-1/2}$  и  $\langle l \rangle \sim \exp(0.237(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2})$  для  $\varepsilon_t = 0.0185$  и  $\varepsilon_c = 0.023$  соответственно.

приведены зависимости средней длительности ламинарных фаз  $\langle l \rangle$  от параметра надкритичности  $(\varepsilon^* - \varepsilon)$ , где  $\varepsilon^* = \varepsilon_c$  — момент перехода к режиму фазовой синхронизации или  $\varepsilon^* = \varepsilon_t \approx 0.0185$  — переход от перемежаемости типа I к перемежаемости „игольного ушка“ (распределение перестает быть гауссовым, ламинарные фазы становятся нерегулярными). Видно, что при  $\varepsilon \lesssim \varepsilon_t$  выполняется степенной закон  $\langle l \rangle \sim (\varepsilon_t - \varepsilon)^{-1/2}$  (рис. 2, *a*; график построен в двойном логарифмическом масштабе), в то время как для  $\varepsilon_t \lesssim \varepsilon < \varepsilon_c$  имеет место следующая закономерность:  $\langle l \rangle \sim \exp(k(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2})$ , где  $k$  — некоторый коэффициент пропорциональности (на рис. 2, *b* по аналогии с [11] приведена зависимость  $\ln(1/\langle l \rangle)$  от  $(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}$ ). Аналогичные законы наблюдаются при любых значениях параметра  $0.98 \lesssim \alpha \lesssim 1.02$  и с точностью до замены переменных соответствуют зависимостям (2) и (3) соответственно.

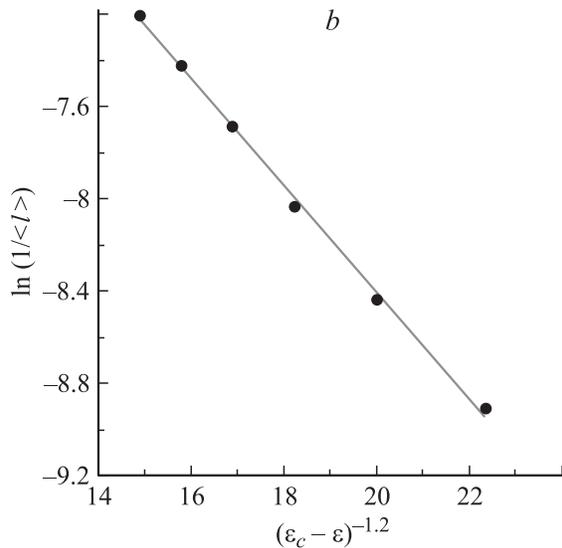


Рис. 2 (продолжение).

Таким образом, можно заключить следующее. При воздействии внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой возникновению режима хаотической фазовой синхронизации предшествует перемежающееся поведение. Как и в случае связанных хаотических систем, в случае малых значений частотной расстройки различные типы перемежаемости имеют место вблизи и вдали от порога возникновения синхронного режима. Анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз показывает, что по аналогии с известными ранее случаями перемежаемость типа I наблюдается вдали от точки перехода к режиму фазовой синхронизации, в то время как вблизи нее имеет место перемежаемость „игольного ушка“.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-02-16273), Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ 4167.2006.2) и НОЦ „Нелинейная динамика и биофизика“ СГУ (CRDF REC-006).

Автор благодарит также за финансовую поддержку Фонд некоммерческих программ «Династия» и Международный центр фундаментальной физики (г. Москва).

## Список литературы

- [1] *Manneville P., Pomeau Y.* // Phys. Lett. A. 1979. V. 75. P. 1.
- [2] *Pomeau Y., Manneville P.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 189.
- [3] *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* L'Ordre Dans Le Chaos. Hermann, Paris, 1988.
- [4] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [5] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. N 1. P. 47–50.
- [6] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114101.
- [7] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Europhysics Lett. 2005. V. 70. N 2. P. 169–175.
- [8] *Boccaletti S., Valladares D.L.* // Phys. Rev. E. 2000. V. 62. N. 5. P. 7497–7500.
- [9] *Lee K.J., Kwak Y., Lim T.K.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. N 2. P. 321–324.
- [10] *Rosa E., Ott E., Hess M.H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. N 8. P. 1642–1645.
- [11] *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F.T.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. N 19. P. 194101.
- [12] *Пиковский А.С., Розенблум М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003.
- [13] *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. N 3. P. 2353–2361.
- [14] *Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 1. С. 21–29.
- [15] *Pyragas K.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. N 5. P. R4508–R4511.