

01;02

## Об определении энергии заряженных частиц, движущихся в волноводе с анизотропной диспергирующей средой

© А.В. Тюхтин

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: tyukhtin@bk.ru

*Поступило в Редакцию 4 марта 2008 г.*

Рассматривается излучение Вавилова–Черенкова в волноводе, заполненном анизотропной диспергирующей средой, главная ось которой совпадает с осью волновода. Отмечено, что при определенном характере дисперсии среды, который может быть реализован с помощью применения искусственных метаматериалов, можно добиться выраженной зависимости частот возбуждаемых мод от Лоренц-фактора даже при достаточно больших его значениях. Данное обстоятельство может быть полезным для определения энергии ультрарелятивистских частиц и их пучков.

PACS: 41.60.Vq

С точки зрения физического эксперимента, анализ излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) интересен, прежде всего, потому, что он может привести к значительному прогрессу в области новых методов ускорения и диагностики заряженных частиц. Многочисленные публикации в этой области касались, в частности, изучения ИВЧ в волноводах (см., например, [1–3]), в том числе со средой, обладающей дисперсией того или иного характера [4–10]. Было показано, что наличие дисперсии зачастую радикально влияет на характер излучения. Отметим также, что в последнее время интерес к подобной тематике возрос в связи с созданием различных видов метаматериалов, которые представляют собой периодические структуры из металлических [10–14] или диэлектрических [15] элементов и позволяют реализовать определенные заданные характеристики среды в СВЧ-диапазоне. Если период структуры мал по сравнению с характерными длинами волн, то по отношению к электромагнитному полю метаматериалы фактически являются сплошными средами.

Рассмотрим круглый волновод, заполненный одноосной анизотропной негиротропной средой, которая характеризуется тензорами диэлектрической ( $\hat{\varepsilon}$ ) и магнитной ( $\hat{\mu}$ ) проницаемостей с главными элементами  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{\parallel}$  и  $\mu_{\perp}$ ,  $\mu_{\parallel}$  соответственно. Предполагая, что ось волновода  $z$  параллельна главной оси среды, имеем

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}.$$

Пусть заряженная частица (или пучок частиц малого размера) движется с постоянной скоростью  $\vec{V} = V\vec{e}_z$  ( $V > 0$ ) вдоль оси волновода. Отметим, что если „среда“ реализована в виде метаматериала, то его можно сконструировать таким образом, чтобы имелись сквозные отверстия, одно из которых совмещено с осью волновода, причем его размер достаточен для беспрепятственного прохождения малого пучка частиц [10].

Нас будет интересовать поле на достаточном удалении от пучка, когда квазистатическая составляющая незначительна, и полное поле практически равно волновому (полю ИВЧ). Следуя [1], для получения данного приближенного решения можно сначала найти строгое интегральное представление и выделить из него вклад полюсов, которые и определяют волновое поле, существующее только в области за зарядом (т.е. в момент времени  $t$  — в области  $z < Vt$ ). Приведем выражения для ненулевых компонент напряженностей электрического ( $\vec{E}$ ) и магнитного ( $\vec{H}$ ) полей в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ :

$$\begin{pmatrix} H_{\varphi} \\ E_r \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{4q}{ca} \theta(Vt - z) \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} i\chi_m^{-1} \omega J_1(\chi_m r/a) \\ i(\beta \varepsilon_{\perp} \chi_m)^{-1} \omega J_1(\chi_m r/a) \\ -c(a \varepsilon_{\parallel})^{-1} J_0(\chi_m r/a) \end{pmatrix} \times \frac{\exp(i\omega(z/V - t))}{[J_1(\chi_m)]^2 (1 + \delta + \kappa)} \Big|_{\omega=\omega_m}, \quad (1)$$

где  $q$  — величина заряда,  $c$  — скорость света в вакууме,  $a$  — радиус волновода,  $\beta = V/c$ ,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \delta = \frac{\omega \beta^2}{2(\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \beta^2 - 1)} \frac{d(\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})}{d\omega},$$

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}} \frac{d}{d\omega} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}.$$

Величины  $\chi_m$  являются нулями функции Бесселя  $J_0(\chi)$ , а частоты гармоник  $\omega_m$  определяются уравнением

$$\omega^2 \varepsilon_{\parallel}(\omega) [\mu_{\perp}(\omega) - \beta^{-2} \varepsilon_{\perp}^{-1}(\omega)] = c^2 a^{-2} \chi_m^2. \quad (2)$$

В частности, в случае пренебрежимо малой дисперсии имеем

$$\begin{aligned} \omega_m &= ca^{-1} \chi_m [\varepsilon_{\parallel}(\mu_{\perp} - \beta^{-2} \varepsilon_{\perp}^{-1})]^{-1/2} \\ &= ca^{-1} \chi_m \{ \varepsilon_{\parallel} [\mu_{\perp} - (1 - \gamma^{-2})^{-1} \varepsilon_{\perp}^{-1}] \}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$  — Лоренц-фактор.

Для определения скорости  $\beta$  и, соответственно, энергии частиц  $mc^2\gamma$  ( $m$  — масса покоя) технически проще всего измерять частоту возбуждаемых гармоник. Однако при  $\gamma \gg 1$  в бездисперсионном случае зависимость частот мод от  $\gamma$  является незначительной, что видно из [3]. Это приведет к понижению точности определения больших значений  $\gamma$ . Отметим, что данный эффект является общим недостатком, по-видимому, всех существующих черенковских детекторов. Однако, как будет показано далее, этот недостаток может быть в определенной степени преодолен.

Рассмотрим такую ситуацию, когда продольная компонента тензора диэлектрической проницаемости зависит от частоты по „плазменному закону“  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\parallel 0} - \omega_p^2 [2i\omega_d\omega + \omega^2]^{-1}$ , а компоненты  $\varepsilon_{\perp}$ ,  $\mu_{\perp}$ ,  $\mu_{\parallel}$  практически постоянны. Если среда реализуется в виде метаматериала, то для получения таких свойств достаточно взять набор металлических стержней, параллельных оси волновода. При этом плазменная частота  $\omega_p$  определяется формулой  $\omega_p^2 = 2\pi c^2 [d^2 \ln(d/r_0)]^{-1}$ , где  $d$  — расстояние между стержнями,  $r_0$  — их радиус (предполагается, что  $d \gg r_0$ ) [10–12,14].

Для аналитического рассмотрения ограничимся случаем бездиссипативной среды, когда  $\omega_d = 0$  (случай идеально проводящих стержней).

Тогда из (2) получаем решение

$$\begin{aligned}\omega_m^2 &= \frac{1}{\varepsilon_{\parallel 0}} \left( \omega_p^2 + \frac{c^2 \chi_m^2}{a^2} \frac{\varepsilon_{\perp} \beta^2}{\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} \beta^2 - 1} \right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_{\parallel 0}} \left( \omega_p^2 + \frac{c^2 \chi_m^2}{a^2} \frac{\varepsilon_{\perp} (\gamma^2 - 1)}{(\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 1) \gamma^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}} \right),\end{aligned}\quad (4)$$

производная которого равна

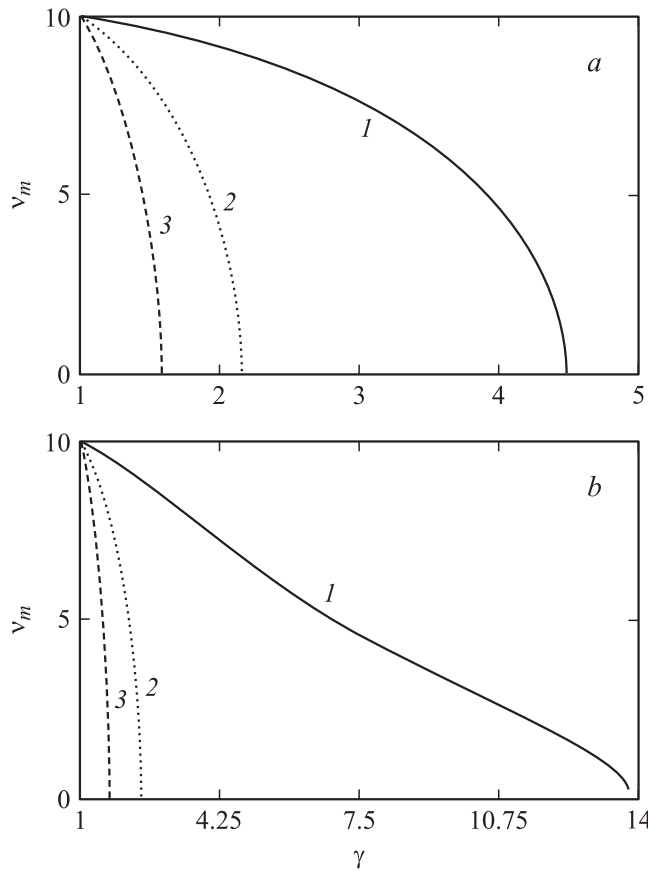
$$\frac{d\omega_m^2}{d\gamma} = -2c^2 \chi_m^2 \varepsilon_{\perp} \gamma \varepsilon_{\parallel 0}^{-1} a^{-2} [(\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 1) \gamma^2 - \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}]^{-2}.$$

В частном случае  $\varepsilon_{\perp} = \mu_{\perp} = \varepsilon_{\parallel 0} = 1$  имеем  $\omega_m^2 = \omega_p^2 - c^2 \chi_m^2 a^{-2} (\gamma^2 - 1)$ , то есть зависимость частот гармоник от Лоренц-фактора по мере его роста усиливается. Однако из требования вещественности частот ( $\omega_m^2 > 0$ ) вытекает неравенство  $\gamma \leq \gamma_m^* = \sqrt{a^2 \omega_p^2 c^{-2} \chi_m^{-2} + 1}$ , что делает невозможным измерение слишком больших значений Лоренц-фактора. В случае  $\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} > 1$  зависимость  $\omega_m(\beta)$  является резко выраженной вблизи значения  $\beta = (\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp})^{-1/2}$ , однако весьма слабой вдали от него, что неудобно для измерения  $\beta$  (и, соответственно,  $\gamma$ ). В случае  $\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} < 1$  условие  $\omega_m^2 > 0$  приводит к неравенству

$$\beta \leq [\varepsilon_{\perp} (\mu_{\perp} + c^2 \chi_m^2 a^{-2} \omega_p^{-2})]^{-1/2},\quad (5)$$

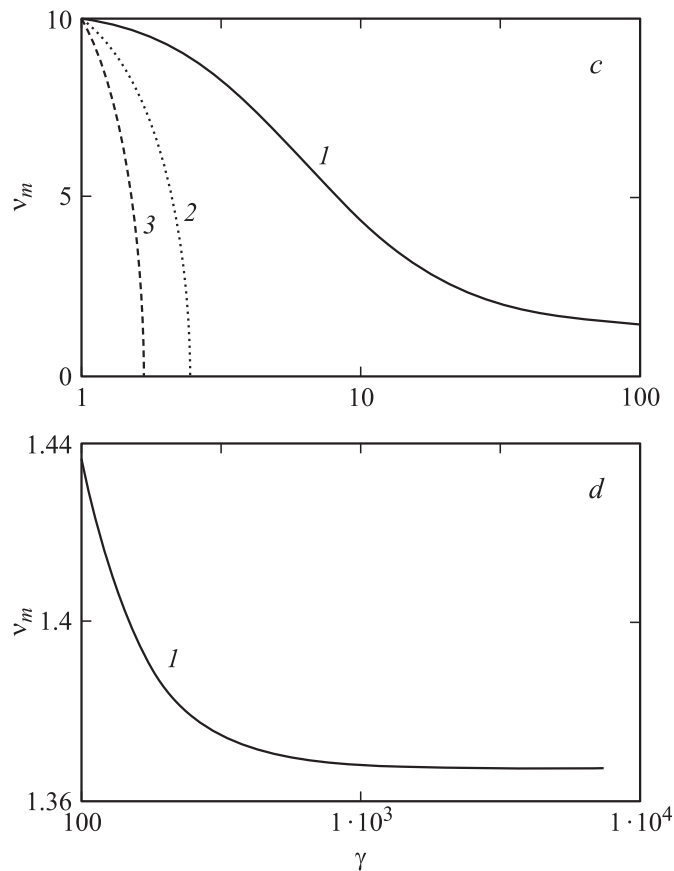
которое, в принципе, может быть удовлетворено для любых значений  $\beta$  вплоть до  $\beta = 1$ . Отметим, однако, что при  $|\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 1| \gamma^2 \gg \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}$  производная  $d\omega_m^2/d\gamma$  убывает пропорционально  $\gamma^{-3}$ , а при  $|\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 1| \gamma^2 \ll \varepsilon_{\perp} \mu_{\perp}$  она растет пропорционально  $\gamma$ . Поэтому для измерения величины  $\gamma$  без ограничения сверху и с наибольшей точностью нужно взять значения  $\varepsilon_{\perp}$  и  $\mu_{\perp}$  так, чтобы неравенство (5) выполнялось даже при  $\beta = 1$ , но величина  $|\varepsilon_{\perp} \mu_{\perp} - 1|$  была как можно меньше, то есть в (5) надо перейти к равенству (для некоторого значения  $m$ ). Это дает значение  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{cm} = (\mu_{\perp} + c^2 \chi_m^2 a^{-2} \omega_p^{-2})^{-1}$ .

Отметим, что при  $a \geq 3$  см,  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^{10}$  Hz,  $\mu_{\perp} = 1$  величина  $\varepsilon_{c1}$  принимает значения, достаточно близкие к 1 (не менее 0.87). В случае метаматериала такая ситуация может быть приближенно



Зависимости частот  $\nu_m$  (GHz) первых трех гармоник от Лоренц-фактора  $\gamma$  при  $a = 5$  см,  $\omega_p = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $\epsilon_{\parallel 0} = \mu_{\perp} = \mu_{\parallel} = 1$  для случаев  $\epsilon_{\perp} = 1$  (a),  $\epsilon_{\perp} = 0.955$  (b),  $\epsilon_{\perp} = 0.949$  (c, d). Номера гармоник указаны на графиках.

реализована с помощью введения дополнительных систем стержней, параллельных осям  $x, y$ . Хотя они дают „плазменную“ зависимость  $\epsilon_{\perp}(\omega) \approx 1 - \omega_{p\perp}^2/\omega^2$ , однако она будет слабой в некотором диапазоне частот (так как  $\omega_{p\perp} \ll \omega_p$ ). Условие  $\epsilon_{\perp} \approx \epsilon_{c1}$  можно также соблюсти за счет подбора  $\mu_{\perp}$ , если включить в метаматериал периодическую систему из металлических петель.



(Продолжение рисунка).

Проиллюстрируем полученные результаты на примере немагнитной среды ( $\mu_{\perp} = \mu_{\parallel} = 1$ ). Для случая  $\varepsilon_{\perp} = 1$  зависимости частот первых трех мод от  $\gamma$  показаны на рисунке *a*. Они являются весьма выраженными, однако обрываются при  $\gamma = \gamma_m^*$ . Рисунок *b* иллюстрирует случай  $\varepsilon_{c1} < \varepsilon_{\perp} < 1$ . Как видим, при этом предельное значение  $\gamma_1^*$  существенно увеличивается, а зависимость  $\omega_1(\gamma)$  близка к линейной. Точность определения Лоренц-фактора в этом случае будет сопоставима с точностью измерения частоты первой моды. Рисунки *c, d* соответствуют

случаю  $\varepsilon_{\perp} \approx \varepsilon_{c1}$ , когда генерация первой моды происходит при любых значениях  $\gamma$ . Зависимость  $\omega_1(\gamma)$  при больших значениях  $\gamma$  не слишком выраженная, однако она вполне достаточна для измерения  $\gamma$  вплоть до  $\gamma \sim 10^4$ . Погрешность определения  $\gamma$  будет на порядок больше погрешности частоты при  $\gamma \sim 100$  и на два порядка — при  $\gamma \sim 1000$ . Это представляется вполне приемлемым, имея в виду высокую (не хуже  $10^{-4}$ ) точность измерения частоты с помощью современной аппаратуры.

В заключение заметим, что применение анизотропных диспергирующих материалов может способствовать также и решению других задач диагностики заряженных частиц и их пучков. Так, в работе [9] отмечена возможность создания „двухпорогового“ детектора, который будет одновременно регистрировать все движущиеся частицы и отдельно частицы, скорость которых превышает некоторое минимальное значение.

Автор признателен А.Д. Канарейкину и О.И. Столярову за интерес к работе и полезные советы.

Работа частично поддержана грантом РФФИ № 06-02-16442-а и грантом SBIR DOE № DE-FG02-08ER85031.

## Список литературы

- [1] *Болотовский Б.М.* // УФН. 1961. Т. 75. № 2. С. 295–350.
- [2] *Зрелов В.П.* Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий. Ч. 1. М., 1968. 276 с.
- [3] *Альтмарк А.М., Канарейкин А.Д., Шейнман И.Л.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. В. 1. С. 89–97.
- [4] *Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 14. С. 68–74.
- [5] *Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 4. С. 37–43.
- [6] *Kanareykin A.D., Tyukhtin A.V.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2006. V. 558. N. 1. P. 62–65.
- [7] *Schachter L.* // Physical Review E. 2000. V. 62. P. 1252–1257.
- [8] *Иванов Н.В., Тюхтин А.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 10. С. 68–75.
- [9] *Tyukhtin A.V., Antipov S.P., Kanareykin A., Schoessow P.* // Proceeding of the 22-nd Particle Accelerator Conference, Albuquerque, USA, 2007. P. 4156–4158.
- [10] *Antipov S., Spentzouris L., Liu W., Gai W., Power J.G.* // Journal of Applied Physics. 2007. V. 102. P. 034906–1–8.

- [11] *Pendry J.B., Holden A.J., Stewart W.J., Youngs I.* // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. N. 25. P. 4773–4776.
- [12] *Zharov A.A., Shadrivov I.V., Kivshar Y.S.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. N. 3. P. 037401–1–4.
- [13] *Ziolkowski R.W.* // IEEE Trans. on Antennas and Propagation. 2003. V. 51. N. 7. P. 1516–1529.
- [14] *Antipov S., Spentzouris L., Gai W., Liu W., Power J.G.* // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A. 2007. V. 579. P. 915–923.
- [15] *Вендик И.Б., Вендик О.Г., Гашинова М.С.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 10. С. 30–39.