01;11

# Эмиссия в системе плоский катод—искривленный анод в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом

© Г.Ш. Болтачев, Н.М. Зубарев

Институт электрофизики Уральского отделения РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 15 мая 2008 г.

Теоретически проанализирована эмиссия электронов в режиме ограничения тока объемным элеткрическим зарядом в вакуумном диоде с искривленным анодом. Разложением по малому параметру — отношению характерных поперечного и продольного масштабов задачи — определены пространственные распределения плотности объемного заряда, электрического поля и поля скоростей в межэлектродном промежутке. В результате аналитически установлено распределение плотности тока эмиссии по поверхности катода. Проведено сравнение аналитических результатов с известными из литературы результатами численных расчетов.

PACS: 52.59.Sa, 41.20.Cv

Как известно [1,2], наличие объемного электрического заряда эмитированных с катода частиц ограничивает величину тока $I$, который может протекать в межэлектродном промежутке при приложении к нему разности потенциалов $U$. Предельное значение тока, в соответствие с законом Чайлда–Ленгмюра, задается соотношением $I = PU^{3/2}$, где коэффициент $P$ (первеанс) определяется геометрией системы. В случае, когда электроды представляют собой бесконечные параллельные плоскости, плотность предельного тока эмиссии $J$ постоянна, и дается выражением:

$$J = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{U^{3/2}}{H^2}, \tag{1}$$

где $e$ — элементарный заряд, $m$ — масса электрона, $\varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, $H$ — межэлектродное расстояние.

Когда электроды отличны от идеально плоских, плотность тока эмиссии не является постоянной величиной. Решение задачи о распределении плотности тока по катоду требует рассмотрения уже не одномерных, а двух- или трехмерных уравнений движения, описывающих поток эмитированных электронов, и в общем случае невозможно аналитическими методами ввиду существенной нелинейности определяющих соотношений. Простейшее приближение, позволяющее адекватно описать распределение плотности тока $J(\mathbf{r}_\perp)$ по плоскому катоду при искривленном аноде, состоит в использовании формулы (1), где постоянную $H$ следует заменить на локальное межэлектродное расстояние, являющееся функцией координат, $h(\mathbf{r}_\perp)$.

Определенный прогресс в изучении этой проблемы с использованием численных методов был достигнут в рамках модели, в которой вводится бесконечное магнитное поле, вынуждающее заряженные частицы двигаться по параллельным прямым. Так, в работе [3] для этой ситуации были рассчитаны пространственные распределения плотности тока и электрического поля на катоде. В результате было обнаружено, что значительно болшую точность аппроксимации распределения $J(\mathbf{r}_\perp)$ можно достичь, если в (1) заменить $H$ на величину $U/E_0$, где $E_0(\mathbf{r}_\perp)$ представляет сбой абсолютное значение напряженности электрического поля на катоде в отсутствие объемного заряда. При этом получим

$$J(\mathbf{r}_\perp) \simeq \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}} \cdot \frac{E_0^2(\mathbf{r}_\perp)}{U^{1/2}}. \qquad (2)$$

В настоящей работе мы аналитически определим распределение плотности тока по катоду как при наличии магнитного поля, так и для более сложной ситуации, когда поле отсутствует, и движение заряженных частиц не является одномерным. При решении этой задачи мы будем использовать разложения по малому параметру, который имеет смысл отношения характерных поперечного и продольного масштабов задачи. Примечательно, что полученные нами аналитические выражения для $J$ и $E_0$ с достаточно высокой точностью удовлетворяют эмпирическому соотношению (2). Последнее свидетельствует о том, что формула (2) дает вполне приемлемую аппроксимацию для распределения плотности тока на катоде.

Будем рассматривать поток электронов, эмитируемых с поверхности плоского бесконечного катода, в отсутствие внешнего мегнитного поля.

Считаем напряженность электрического поля на катоде равной нулю, что соответствует эмиссии в режиме ограничения тока объемным электрическим зарядом. Начальную скорость частиц $\mathbf{v}$ также будем полагать равной нулю. Движение электронов в электрическом поле $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, где $\Phi$ — потенциал электрического поля, удобно описывать, вводя потенциал скорости $\Psi$, так что $\mathbf{v} = \nabla\Psi$. Тогда исходную систему уравнений можно записать в виде [4,5]:

$$\nabla^2\Phi = eN/\varepsilon_0, \quad m(\nabla\Psi)^2/2 = \Phi e, \quad \nabla(N\nabla\Psi) = 0, \tag{3}$$

где $N$ — концентрация электронов. Первое уравнение — уравнение Пуассона для потенциала $\Phi$, которое следует дополнить условиями эквипотенциальности катода, $\Phi = 0$, и анода, $\Phi = U$. Второе уравнение — закон сохранения энергии электрона в электростатическом поле. Третье уравнение — уравнение непрерывности потока частиц.

Пусть ось $z$ декартовой системы координат направлена по нормали к поверхности катода, задаваемой условием $z = 0$. Анод располагается на расстоянии $h(x, y)$ от катода, т. е. его поверхность задается уравнением $z = h$. Будем считать, что в задаче имеется малый параметр

$$\varepsilon = \max\left(|\nabla_\perp h|^2, h|\nabla_\perp^2 h|\right) \ll 1,$$

где $\nabla_\perp$ — градиент в плоскости $\{x, y\}$. В частности, это означает, что углы наклона поверхности анода малы. Отметим также, что мы не требуем малости отклонения локального межэлектродного расстояния $h$ от его среднего значения $H$.

Перейдем к безразмерным обозначениям заменами:

$$z' = z/H, \quad h' = h/H, \quad x' = \varepsilon^{1/2}x/H, \quad y' = \varepsilon^{1/2}y/H,$$

$$n = \frac{eNH^2}{\varepsilon_0 U}, \quad \varphi = \frac{\Phi}{U}, \quad \psi = \Psi\sqrt{\frac{m}{2eUH^2}}.$$

Тогда исходная система уравнений (3) принимает следующий вид (здесь и в дальнейшем мы опускаем штрихи):

$$\varphi_{zz} + \varepsilon\nabla_\perp^2\varepsilon = n,$$

$$\psi_z^2 + \varepsilon(\nabla_\perp\psi)^2 = \varphi,$$

$$(n\psi_z)_z + \varepsilon n\nabla_\perp^2\psi + \varepsilon(\nabla_\perp n \cdot \nabla_\perp\psi) = 0. \tag{4}$$

Эти уравнения следует решать совместно с граничными условиями:

$$\varphi = \varphi_z = \psi_z = 0, \quad z = 0;$$

$$\varphi = 1, \quad z = h(x, y).$$

Будем искать в виде разложения по малому параметру $\varepsilon$:

$$\varphi = a_0 z^{4/3} + \varepsilon(a_1 z^{4/3} + a_2 z^{10/3}) + O(\varepsilon^2),$$

$$n = b_0 z^{-2/3} + \varepsilon(b_1 z^{-2/3} + b_2 z^{4/3}) + O(\varepsilon^2),$$

$$\psi = c_0 z^{5/3} + \varepsilon(c_1 z^{5/3} + c_2 z^{11/3}) + O(\varepsilon^2),$$

где $a_i, b_i$ и $c_i$ — некоторые функции переменных $x$ и $y$. Для этого представления все необходимые граничные условия на катоде удовлетворяются автоматически, а для выполнения граничного условия на аноде необходимо положить:

$$a_0 = h^{-4/3}, \quad a_1 = -a_2 h^2. \tag{5}$$

Подстановка записанных разложений в (4) дает в основном порядке: $b_0 = 4h^{-4/3}/9$ и $c_0 = 3h^{-2/3}/5$, а в первом порядке разложения по $\varepsilon$:

$$a_1 = \frac{94}{225}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{4/3}} - \frac{8}{45}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{1/3}}, \quad a_2 = -\frac{94}{225}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{10/3}} + \frac{8}{45}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{7/3}},$$

$$b_1 = \frac{376}{2025}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{4/3}} - \frac{32}{405}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{1/3}}, \quad b_2 = -\frac{56}{405}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{10/3}} + \frac{4}{81}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{7/3}},$$

$$c_1 = \frac{47}{375}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{2/3}} - \frac{4}{75}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{-1/3}}, \quad c_2 = -\frac{13}{165}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^{8/3}} + \frac{4}{165}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^{5/3}}.$$

В результате мы может найти безразмерную плотность электрического тока эиссии с поверхности катода $(j)$ с учетом слагаемых порядка $O(\varepsilon)$:

$$j = (n\psi_z)|_{z=0} = \frac{4}{9} a_0^{3/2} + \varepsilon \left( b_1 a_0^{1/2} + \frac{20}{27} c_1 a_0 \right).$$

Подставляя сюда полученные выражения для коэффициентов $a_0$, $b_1$ и $c_1$, находим:

$$j = \frac{4}{9h^2}\left(1 + \frac{47\varepsilon}{75}(\nabla_\perp h)^2 - \frac{4\varepsilon}{15} h \nabla_\perp^2 h\right)$$

$$\simeq \frac{4}{9h^2}\left(1 + 0.63\varepsilon(\nabla_\perp h)^2 - 0.27\varepsilon h \nabla_\perp^2 h\right). \tag{6}$$

Аналогичное соотношение для плотности тока несложно получить и при наличии бесконечного внешнего манитного поля, при введении которого все частицы вынуждены двигаться только вдоль оси $z$, и уравнение движения электронов решается аналитически. Для замагниченного потока электронов уравнение Пуассона принимает вид:

$$\varphi_{zz} + \varepsilon \nabla_{\perp}^2 \varphi = j/\sqrt{\varphi}. \tag{7}$$

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ и плотность тока $j(x, y)$, входящие в это уравнение, однозначно находятся из требования его совместности с условиями на границах:

$$\varphi = \varphi_z = 0, \quad z = 0$$

$$\varphi = 1, \quad z = h(x, y).$$

Решения, как и раньше, ищем в виде разложения по малому параметру $\varepsilon$:

$$\varphi = a_0 z^{4/3} + \varepsilon(a_1 z^{4/3} + a_2 z^{10/3}) + O(\varepsilon^2), \quad j = j_0 + \varepsilon j_1 + O(\varepsilon^2),$$

где $a_i$ и $j_i$ — функции переменных $x$ и $y$. Следствием граничного условия на аноде являются соотношения, совпадающие с (5). При подстановке разложений в (7) получим:

$$j_0 = \frac{4}{9}\frac{1}{h^2}, \quad j_1 = \frac{7}{27}\frac{(\nabla_{\perp} h)^2}{h^2} - \frac{1}{9}\frac{\nabla_{\perp}^2 h}{h}, \quad a_2 = -\frac{7}{18}\frac{(\nabla_{\perp} h)^2}{h^{10/3}} + \frac{1}{6}\frac{\nabla_{\perp}^2 h}{h^{7/3}}.$$

Для плотности электрического тока на поверхности катода находим

$$j = \frac{4}{9h^2}\left(1 + \frac{7\varepsilon}{12}(\nabla_{\perp} h)^2 - \frac{\varepsilon}{4} h \nabla_{\perp}^2 h\right)$$

$$\simeq \frac{4}{9h^2}\left(1 + 0.58\varepsilon(\nabla_{\perp} h)^2 - 0.25\varepsilon h \nabla_{\perp}^2 h\right), \tag{8}$$

что, как несложно заметить, отличается от выражения (6) значениями коэффициентов разложения в первом порядке по $\varepsilon$.

В отсутствие объемного заряда распределение потенциала электрического поля определяется уравнением Лапласа и условиями эквипотенциальности электродов:

$$\varphi_{zz} + \varepsilon \nabla_{\perp}^2 \varphi = 0,$$

$$\varphi = 0, \quad z = 0,$$

$$\varphi = 1, \quad z = h(x, y).$$

Разложение по малому параметру $\varepsilon$ принимает в этом случае вид

$$\varphi = a_0 z + \varepsilon(a_1 z + a_2 z^3) + O(\varepsilon^2).$$

Для коэффициентов разложения находим:

$$a_0 = h^{-1}, \quad a_1 = -a_2 h^2, \quad a_2 = -\frac{1}{2}\frac{(\nabla_\perp h)^2}{h^3} + \frac{1}{6}\frac{\nabla_\perp^2 h}{h^2}.$$

Дифференцируя потенциал поля, получим для квадрата напряженности электрического поля на катоде (при $z = 0$):

$$E_0^2 = h^{-2}\left(1 + \frac{2\varepsilon}{3}(\nabla_\perp h)^2 - \frac{\varepsilon}{3} h \nabla_\perp^2 h\right)$$
$$\simeq h^{-2}\left(1 + 0.66\varepsilon(\nabla_\perp h)^2 - 0.33\varepsilon h \nabla_\perp^2 h\right). \tag{9}$$

Сравнивая выражения для плотности тока без магнитного поля (6) и при наличии магнитного поля (8) с формулой (9), обнаруживаем, что в обоих случаях соотношение $j \simeq 4E_0^2/9$ оказывается значительно более точным, чем соотношение $j \simeq 4h^{-2}/9$, возникающее в нулевом порядке теории возмущений.

Итак, в настоящей работе найдено аналитическое выражение для распределения плотности тока эмиссии по поверхности плоского катода при отличном от плоского аноде. Сравнение полученных аналитических результатов с известными результатами численных расчетов [3] подтвердило, что эмпирически установленное соотношение (2) с приемлемой точностью представляет зависимость плотности тока от геометрии задачи. Вместе с тем, использование формул (6) и (8) уже в порядке $O(\varepsilon)$ позволяет значительно поднять точность аппроксимации по сравнению с (2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (проект 07-02-96035), Совета по грантам при президенте РФ (проект МД-2553.2007.2) и Фонда „Династия“ Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

## Список литературы

[1] *Child C.D.* // Phys. Rev. 1911. V. 32. P. 492.
[2] *Langmuir I.* // Phys. Rev. 1913. V. 2. P. 450.
[3] *Umstattd R.J., Luginsland J.W.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. art. no 145002.
[4] *Кирштейн П., Кайно Г., Уотерс У.* Формирование электронных пучков. М.: Мир, 1970.
[5] *Boltachev G.Sh., Zubarev N.M.* // Europhysics Letters. 2006. V. 76. P. 36.