09

Распределение длительностей ламинарных фаз при перемежаемости „игольного ушка“

© М.К. Куровская

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
E-mail: mc@nonlin.sgu.ru

Поступило в Редакцию 18 июня 2008 г.

Рассматривается распределение длительностей ламинарных фаз при перемежающемся поведении типа „игольного ушка“, наблюдаемом вблизи границы фазовой синхронизации связанных хаотических осцилляторов. Впервые показано, что распределение длительностей ламинарных фаз в этом случае подчиняется экспоненциальному закону.

PACS: 05.45.-a, 05.45.Xt, 05.45.Tp

Перемежающееся поведение наблюдается в системах самой различной природы и возникает, в частности, при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1], а также на границе режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [2]. Механизмы, приводящие к возникновению перемежаемости в различных системах, а также статистические характеристики перемежающегося поведения исследуются на протяжении уже долгого времени, при этом данная проблема в последнее время вызывает все больший интерес со стороны исследователей как с фундаментальной, так и с прикладной точек зрения [3,4].

Одним из типов перемежающегося поведения, который наблюдается вблизи границы фазовой синхронизации двух связанных хаотических осцилляторов, является перемежаемость „игольного ушка“. К настоящему времени известно большое число работ, посвященных данному типу перемежающегося поведения. Традиционно возникновение данного типа перемежаемости объясняется с точки зрения синхронизации неустойчивых периодических седловых орбит, встроенных в хаотические аттракторы взаимодействующих осцилляторов [2,5]. Исходя из этого перемежающееся поведение типа „игольного ушка“ характеризуется зависимостью средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности [6–8]

$$\ln\frac{1}{\tau} = a - b(\varepsilon_c - \varepsilon)^{-1/2}, \qquad (1)$$

где ε определяет величину связи между хаотическими осцилляторами, ε_c — критическое значение параметра связи, при котором устанавливается режим фазовой синхронизации, a и b — некоторые константы.

Следует отметить, что для описания перемежающегося поведения традиционно используются две основные характеристики — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных фаз. Однако если при рассмотрении перемежаемости „игольного ушка“ исследователи достаточно часто обращаются к средней длительности ламинарных фаз в зависимости от параметра надкритичности, то закон распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости „игольного ушка“ до настоящего времени известен не был. Отчасти это обусловлено тем, что в рамках концепции синхронизации неустойчивых седловых орбит получить аналитический закон для подобного распределения не удавалось. В то же время в ряде случаев единственной доступной для анализа характеристикой перемежающегося поведения является именно распределение длительностей ламинарных фаз, поскольку далеко не всегда в эксперименте исследователь может варьировать параметр надкритичности изучаемой системы, и, следовательно, зависимость средней длительности ламинарных фаз не может быть получена [3–4].

Настоящая работа посвящена исследованию распределения длительностей ламинарных фаз при перемежаемости „игольного ушка“, наблюдаемой вблизи границы фазовой синхронизации двух связанных хаотических осцилляторов, и в ней впервые показано, что это распределение подчиняется экспоненциальному закону.

В качестве исследуемой системы были выбраны две однонаправленно связанные системы Ресслера, динамика которых описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, & \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r),\\
\dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, & \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r,\\
\dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), & \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Значения остальных управляющих параметров системы (2) были выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры ω_r и ω_d, отвечающие собственным частотам ведомой и ведущей подсистем соответственно, были фиксированы: $\omega_r = 0.95$, $\omega_d = 0.93$. Границе фазовой синхронизации соответствует величина $\varepsilon_c \approx 0.042$.

Мгновенная фаза хаотического сигнала $\varphi(t)$ вводились традиционным способом [9] как угол поворота $\varphi = \mathrm{arctg}(y/x)$ на плоскости (x, y) каждой из подсистем. Наличие синхронного поведения можно диагностировать при выполнении условия захвата фаз

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_d(t) - \varphi_r(t)| < \mathrm{const}. \tag{3}$$

Ниже границы фазовой синхронизации зависимость разности фаз от времени содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), прерывающиеся внезапными проскоками (турблентные фазы), во время которых значение разности фаз изменяется на 2π.

На рис. 1 представлены зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, а также соответствующая аппроксимация, подчиняющаяся выражению (1). Закономерность (1) является справедливой в диапазоне значений параметра связи $\varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_c$, где $\varepsilon_t \approx 0.031$, что позволяет говорить о наличии в системе перемежаемости „игольного ушка“.

Необходимо отметить, что существует иная трактовка механизмов, приводящих к возникновению перемежаемости „игольного ушка“ когда данный тип перемежающегося поведения рассматривается как перемежаемость типа I в закритической области значений управляющего параметра в присутствии шума. При таком подходе используется эталонная модель перемежающегося поведения I типа с добавлением стохастического слагаемого, отвечающего за воздействие шумов:

$$x_{n+1} = x_n + x_n^2 + \sigma + \xi_n, \tag{4}$$

где σ — параметр надкритичности, ξ_n — дельта-коррелированный белый шум.

В этом случае в закритической области значения управляющего параметра изображающая точка, характеризующая поведение системы на диаграмме Ламерея, может выйти под действием шума за границы бассейна притяжения устойчивого состояния, в результате чего возникает турбулентная фаза. В [10] исследовались статистические

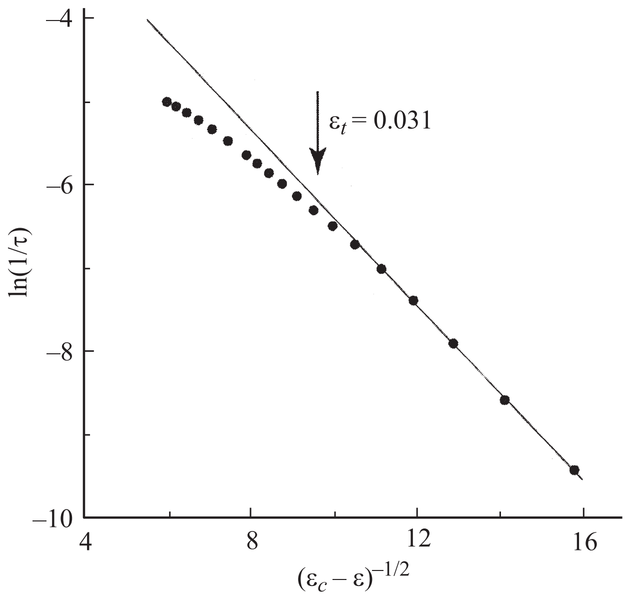

Рис. 1. Зависимость величины $\ln(1/\tau)$ от параметра $(\varepsilon_c-\varepsilon)^{-1/2}$ для двух однонаправленно связанных системРесслера (2). Точки, полученные численным интегрированием системы (2), изображены символом •. Теоретическая зависимость (1) для перемежаемости типа „игольного ушка“ показана сплошной линией. Стрелкой отмечена граница возникновения режима перемежаемости „игольного ушка“.

характеристики перемежаемости типа I при наличии в системе дельта-коррелированного шума с нулевым средним и был аналитически получен закон для зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности в виде

$$\tau = \frac{1}{k\sqrt{\sigma}} \exp = \left(\frac{4\sigma^{3/2}}{3D} \right), \tag{5}$$

где D — интенсивность шума, k — коэффициент пропорциональности.

В [10] было также показано, что зависимость (5) является справедливой и в том случае, если шум имеет детерминированную природу, а именно, в случае перемежающегося поведения связанных хаотических осцилляторов вблизи границы фазовой синхронизации (в случае перемежаемости „игольного ушка“).

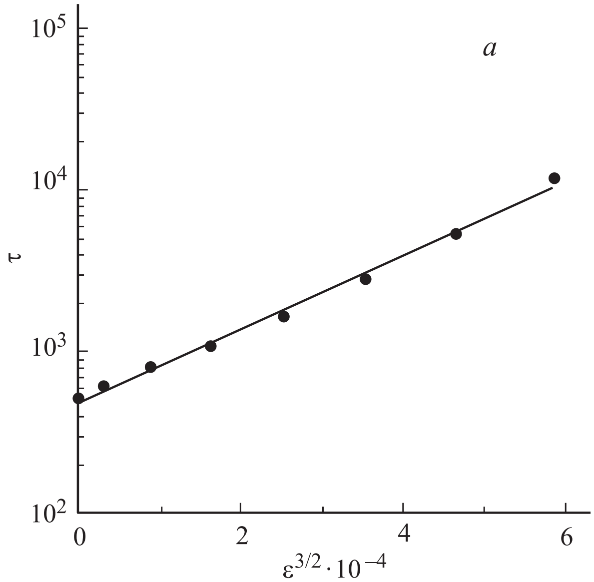

Рис. 2. a — зависимость средней длительности ламинарных фаз τ от величины $\sigma^{3/2}$, где $\sigma = \varepsilon_c - \varepsilon$ для системы (2). Сплошной линией показана теоретическая зависимость (5). Символ • соответствует численным данным. По оси ординат выбран логарифмический масштаб. b — распределения длительностей ламинарных фаз, полученные численно для различных значений параметра связи из диапазона $\varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_c$, в котором наблюдается перемежаемость „игольного ушка", и соответствующие аппроксимации (6), показанные сплошными линиями. *1* — $\varepsilon = 0.036$, $N(t) = 1930e^{-t/2334}$; *2* — $\varepsilon = 0.034$, $N(t) = 8330e^{-t/780}$; *3* — $\varepsilon = 0.032$, $N(t) = 20\,000e^{-t/350}$.

В то же самое время в [11] на основе подхода, связанного с рассмотрением перемежающегося поведения типа I в закритической области значений управляющего параметра в присутствии дельта-коррелированного шума с нулевым средним [10], был получен закон распределения длительностей ламинарных фаз в виде

$$N(t) = \frac{K}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \qquad (6)$$

где τ — средняя длительность ламинарных фаз, K — коэффициент пропорциональности. Соответственно возникает вопрос о применимости

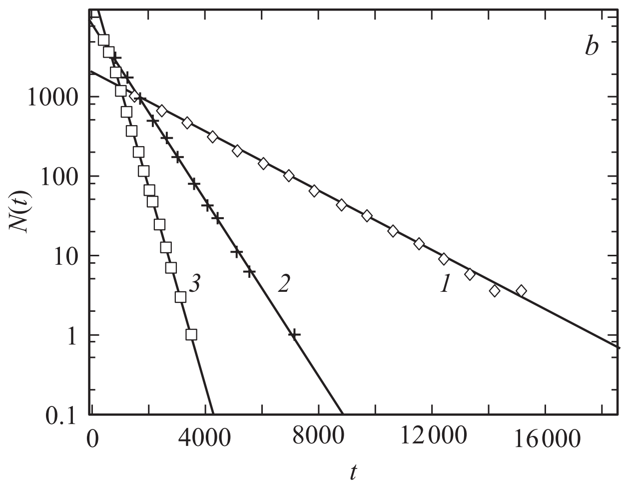

Рис. 2 (*продолжение*).

соотношения (6) для систем, в которых шум имеет детерминированную природу, в частности, для описания перемежаемости „игольного ушка“, возникающей на границе фазовой синхронизации. На рис. 2, *a* изображена зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности и соответствующая аппроксимация (5), справедливая, так же как и зависимость (1), для значений параметра связи из диапазона $\varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_c$. На рис. 2, *b* показаны распределения длительностей ламинарных фаз, полученные при различных значениях параметров связи $\varepsilon\,(\varepsilon_t < \varepsilon < \varepsilon_c)$. Отчетливо видно, что данные распределения характеризуются экспоненциальным законом (6). Соответствующие аппроксимации показаны сплошными линиями.

Полученный результат обладает большой степенью общности, поскольку подобное явление имеет место в широком классе систем, как хаотических, в которых можно наблюдать переход к режиму фазовой синхронизации, так и в системах с периодической динамикой в присутствии шумов. Очевидно, что шумы неизбежно присутствуют и в физическом эксперименте, и в численном моделировании, и хотя в ряде случаев влиянием шумов можно пренебречь, вблизи бифуркационной точки они могут кардинально изменять динамику системы. Поэтому понимание того, какое влияние оказывают шумы (и детерминированной, и случайной природы) на поведение системы вблизи точки бифуркации, является важным для широкого круга задач как фундаментального, так и прикладного характера. В настоящей работе впервые показано, что распределение длительностей ламинарных фаз в случае, когда в системе наблюдается перемежаемость „угольного ушка“, удовлетворяет экспоненциальному закону. Данный результат свидетельствует о применимости подхода, связанного с рассмотрением перемежающегося поведения типа I в закритической области значений управляющих параметров в присутствии шума, для описания перемежаемости „игольного ушка“, возникающей на границе фазовой синхронизации связанных хаотических осцилляторов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-02-00044), Президентской программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-335.2008.2) и Фонда некоммерческих программ „Династия“.

Список литературы

[1] *Dubois M., Rubio M., Berge P.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 1446.
[2] *Pikovsky A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79 (1). P. 47–50.
[3] *Cabrera J.L., Milnor J.* // Phys. Rev. Lett. 2002.V. 89. N 15. P. 158702.
[4] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Midzyanovskaya I.S., Sitnikova E., Rijn C.M.* // Chaos. 2006. V. 16. P. 043111.
[5] *Rosa E., Jr., Ott E., Hess M.H.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. N 8. P. 1642–1645.
[6] *Grebogi C., Ott E., Yorke J.A.* // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. N 13. P. 935–938.
[7] *Lee K.J., Kwak Y., Jun Lim T.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. N 2. P. 321–324.
[8] *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arecchi F.T.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 89. N 19. P. 1–4.
[9] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V., Kurths J.* // Physica D. 1997. V. 104. N 4. P. 219–238.
[10] *Kye W.-H., Kim C.-M.* // Pys. Rev. E. 2000. V. 62. N 5. P. 6304–6307.
[11] *Hramov A.E.* et al. // Phys. Rev. E. 2007. V. 76. N 2.