01;03

Точные решения для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в электрическом поле заряженной прямой нити

© Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева, П.К. Иванов

Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург
E-mail: nick@ami.uran.ru

Поступило в Редакцию 23 апреля 2009 г.

Рассмотрена задача о возможности равновесных конфигураций свободной поверхности проводящей жидкости в электрическом поле горизонтально расположенной заряженной прямой нити. С помощью метода конформных отображений получено однопараметрическое семейство ее точных решений, учитывающих влияние капиллярных сил. Найдены условия, при которых занимаемая жидкостью область перестает быть односвязной — на поверхности формируется заряженная капля.

PACS: 41.20.Cv, 68.03.-g, 47.65.-d

Плоскость представляет собой простейшую равновесную конфигурацию свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем однородном электрическом поле. Известно также семейство нетривиальных точных решений, соответствующих периодическим деформациям поверхности [1,2].

Мы рассмотрим возможность построения точных решений в ситуации, когда поле локально неоднородно: параллельно поверхности жидкости размещена бесконечная равномерно заряженная прямая нить. Пусть оси x и y прямоугольной системы координат расположены в плоскости, перпендикулярной нити, причем ось y направлена по нормали к невозмущенной поверхности жидкости. Для плоской поверхности проводника распределение потенциала электрического поля задается выражением:

$$\varphi = -Ey - Q\ln\big((y-L)^2 + x^2\big) + Q\ln\big((y+L)^2 + x^2\big), \qquad (1)$$

где E — напряженность внешнего однородного электрического поля, Q — заряд единицы длины нити, L — расстояние от нити до границы.

Последнее слагаемое в (1) соответствует фиктивному заряду в рамках метода изображений [3]. Электростатическое давление на границе жидкости в этом случае задается выражением:

$$P_E = \frac{(\nabla\varphi)^2\big|_{y=0}}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}\left(E - \frac{4QL}{L^2+x^2}\right)^2, \qquad (2)$$

т.е. в его распределении имеется возмущение вблизи нити. Как следствие, плоскость уже не может являться равновесной конфигурацией поверхности проводящей жидкости. Поверхность будет деформироваться. При компенсации дестабилизирующего влияния электростатических сил капиллярными силами может возникнуть новая равновесная конфигурация поверхности жидкости. В настоящей работе мы найдем семейство точных решений для подобных конфигураций.

Следует отметить, что электростатическая задача о влиянии поля заряженных нитей на конфигурацию поверхности проводящей жидкости с математической точки зрения эквивалентна гидродинамической задаче о деформации свободной поверхности плоским течением идеальной жидкости, обусловленным наличием линейных вихрей. Подобная задача рассматривалась для различных типов течений жидкости в работах [4,5].

Будем считать, что задача обладает плоской симметрией — все величины зависят лишь от переменных x и y. Тогда распределение потенциала электрического поля φ над жидким проводником задается двумерным уравнением Пуассона:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -4\pi Q\delta(x, y - L),$$

где $\delta(x, y)$ — дельта-функция Дирака. Его следует решать совместно с условием эквипотенциальности поверхности проводника $\varphi = 0$, а также условием того, что на бесконечном удалении от заряженной нити электрическое поле однородно:

$$\varphi \to -Ey, \quad x^2 + (y-L)^2 \to \infty.$$

Равновесный рельеф заряженной границы проводящей жидкости определяется условием баланса электростатических и капиллярных сил, действующих на поверхность:

$$(8\pi)^{-1}(\nabla\varphi)^2\big|_{\varphi=0} + T\kappa + P = 0, \qquad (3)$$

где T — коэффициент поверхностного натяжения, κ — локальная кривизна поверхности, $P \equiv -(8\pi)^{-1}E^2$ — разность давлений внутри и вне жидкости.

Перейдем к безразмерным обозначениям посредством замен:

$$x \to x 8\pi T E^{-2}, \quad y \to y 8\pi T E^{-2}, \quad \varphi \to \varphi 8\pi T E^{-1}.$$

При этом вместо линейной плотности заряда Q и расстояния L мы будем использовать безразмерные комплексы:

$$q = QE(8\pi T)^{-1}, \qquad l = LE^2(8\pi T)^{-1}.$$

Введем комплексный потенциал $W = \varphi - i\psi$, где ψ — гармонически сопряженная к потенциалу φ функция; условие $\psi = \mathrm{const}$ задает силовые линии электрического поля. В области над жидкостью всюду за исключением точки $z = il$ потенциал W является аналитической функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

Осуществим конформное преобразование $z = z(w)$ области над жидкостью в верхнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$. Поверхность жидкости будет соответствовать условию $v = 0$; ее удобно задать параметрическими выражениями $y = Y(u)$ и $x = X(u)$. Кривизна поверхности тогда будет определяться формулой:

$$\kappa = \mathrm{Im}(Z_{uu}\bar{Z}_u)(Z_u\bar{Z}_u)^{-3/2},$$

где $Z = X + iY$. Условие баланса давлений на поверхности проводящей жидкости (2) запишется в виде:

$$|W_w|^2_{v=0} + \frac{\mathrm{Im}(Z_{uu}\bar{Z}_u)}{|Z_u|} = |Z_u|^2. \tag{4}$$

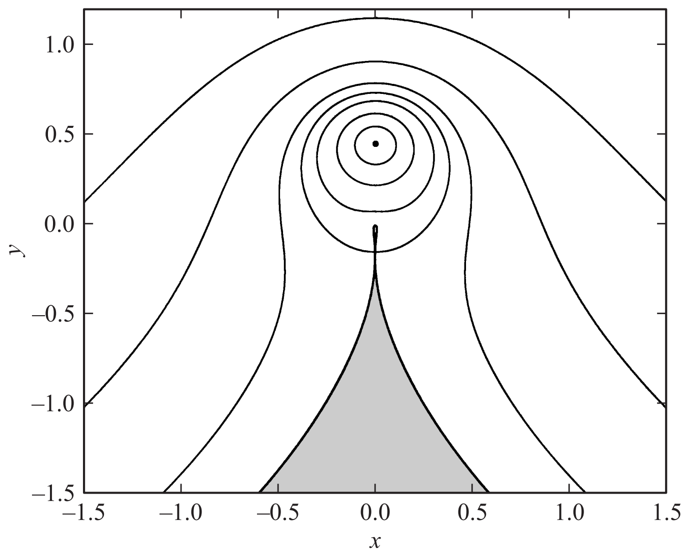
В новых переменных, в которых форма поверхности жидкости известна, комплексный потенциал задается выражением:

$$W(w) = iw - 2q\ln(w - ia) + 2q\ln(w + ia), \tag{5}$$

где вещественный параметр a задает расстояние от заряженной нити до поверхности жидкости в переменных u и v. Отметим, что это выражение по структуре аналогично выражению (1).

Зависимость Z от параметра u будем искать в виде:

$$Z(u) = Z_0 + u - 2i\gamma\ln(u + ia) + \frac{\gamma^2}{u + ia}, \tag{6}$$



где γ — вещественный параметр. Данное представление для формы поверхности соответствует отображению, для которого

$$z_w = \left(1 - \frac{i\gamma}{w + ia}\right)^2.$$

Видно, что функция $z(w)$ имеет особенность в точке $w = -ia$, т.е. в нижней полуплоскости комплексного w. Постоянную Z_0 выберем таким образом, чтобы $Z(0) = 0$, т.е.

$$Z_0 = 2i\gamma \ln a + i\gamma^2 a^{-1} - \gamma\pi.$$

При этом расстояние от заряженной нити до искривленной поверхности жидкости в переменных x и y будет задаваться выражением:

$$l = a - 2\gamma \ln 2 + \gamma^2 (2a)^{-1}.$$

Подставляя (5) и (6) в (4), находим, что параметры a, q и γ должны быть связаны соотношениями:

$$a = \frac{3}{4}\gamma + \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma}, \quad q = \frac{\gamma + 2\gamma a - \gamma^2}{4a}.$$

Значение параметра γ при этом находится в диапазоне: $0 < \gamma \leqslant \gamma_c$, где $\gamma_c \simeq 2.1$. При $\gamma \to 0$ влияние электрического поля нити становится пренебрежимо малым, и равновесная поверхность превращается в плоскость. При увеличении γ поверхность деформируется, причем характерные углы наклона увеличиваются. Наконец, при $\gamma = \gamma_c$ занимаемая жидкостью область перестает быть односвязанной – под действием электростатических сил на поверхности формируется капля, которая отрывается от основной массы жидкости (см. рисунок).

Как видно из (6), при $|X| \to \infty$ будет $Y \to -2\gamma \ln |X|$, т.е. в решении для формы поверхности имеется слабая логарифмическая расходимость. Ее появление связано с тем, что мы не учитываем влияния поля тяжести, которое будет определять форму границы на периферии.

Итак, мы нашли однопараметрическое семейство точных решений задачи о стационарной форме поверхности проводящей жидкости во внешнем неоднородном поле. Они описывают сильно нелинейные конфигурации поверхности, в том числе предельный случай самопересекающейся поверхности, соответствующий отрыву заряженной капли. Понятно, что получить подобные решения в принципе невозможно в рамках теории возмущений по малому параметру — углу наклона поверхности. Использованный в работе подход может быть использован для анализа равновесных конфигураций поверхности в электрическом поле системы параллельных заряженных нитей.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (проект 07-02-96035) и Фонда „Династия“ в рамках Целевой программы поддержки междисциплинарных проектов УрО РАН и СО РАН и Программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“.

Список литературы

[1] *Зубарев Н.М.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. В. 22. С. 79.
[2] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. В. 6 (12). С. 1990.
[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
[4] *Crowdy D.* // Phys. Fluids, 1999. V. 11. N 10. P. 2836.
[5] *Blyth M.G., Vanden-Broeck J.-M.* // SIAM J. Appl. Math. 2005. V. 66. N 1. P. 174.