01;06

Связанные состояния электрона для системы соединенных квантовых волноводов в поперечном электрическом поле

© Д.Г. Матвеев, И.Ю. Попов

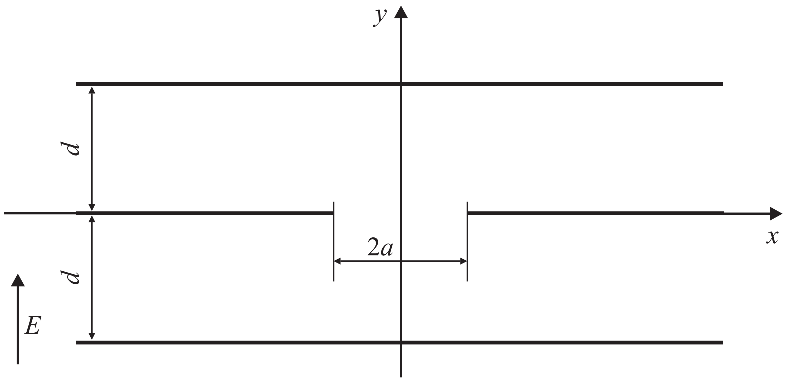
Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики
E-mail: d.g.matveev@gmail.com

Поступило в Редакцию 10 июня 2009 г.

Показано существование связанного состояния электрона для квантовых волноводов, соединенных через малое отверстие и помещенных в поперечное электрическое поле. Вариационным методом получены оценки сдвига собственного значения при изменении поля.

PACS: 73.63.-b

Современные технологии позволяют получать наноструктуры, в которых длина свободного пробега электрона превышает размер самой структуры, что дает возможность рассматривать электронный транспорт в этой системе в приближении баллистического режима. Полупроводниковые гетероструктуры такого размера могут быть получены методом металлоорганической газовой эпитаксии и молекулярно-пучковой эпитаксии с использованием прецизионного травления или специальных затворов [1]. Легирование может проводиться нанесением органического монослоя с атомами легирующего элемента (бора при дырочном легировании или фосфора при электронном легировании) с последующим термическим отжигом [2]. Авторы [2] с успехом использовали этот метод для легирования нанопроводов Si толщиной около 30 nm, а также для изготовления полевых транзисторов в структурах кремний-на-изоляторе. В принципе, он применим и к другим типам полупроводников, позволяя контролировать электрические характеристики разнообразных полупроводниковых наноматериалов. С математической точки зрения анализ такой системы сводится к



Система связанных волноводов: d — толщина волновода, $2a$ — ширина связующего отверстия, E — напряженность электрического поля.

волноводной задаче с возможными внешними полями. Именно такая модель и рассматривается в данной статье. В случае полупроводниковых структур естественными являются граничные условия Дирихле, если же рассматриваются металлические слоистые структуры с ферромагнитными слоями, то возможны и другие краевые условия, в частности условия Неймана, с которыми мы и будем иметь дело в настоящей работе. Известно, что для системы связанных волноводов (см. рисунок) в спектре лапласиана с граничными условиямии Дирихле имеется собственное значение, отстоящее от непрерывного спектра на величину порядка четвертой степени размера связывающего отверстия [3]. Одним из вариантов управления электронным транспортом в данной системе является локальное воздействие на нее электрическими полями. Поэтому важно уметь оценивать влияние электрического поля на спектр оператора. В качестве малого электрического поля можно с некоторыми ограничениями рассматривать поле электрона, движущегося по параллельному волноводу, — с этой точки зрения решение задачи является приближением двухкубитовой операции квантового компьютера [4,5].

Мы будем рассматривать приближение однородного поперечного поля напряженности E. Его наличие приводит к сдвигу границы непрерывного спектра лапласиана в полосе из точки Λ в λ_0 такое, что $\sqrt{\lambda_0} = \sqrt{\Lambda} - \frac{1}{4}\frac{dE}{\sqrt{\Lambda}}$, где $\Lambda = \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2}$, где m — эффективная масса электрона, $\hbar$ — постоянная Планка. Сдвиг собственного значения мы оценим, используя прямые вариационные методы.

В случае поперечного однородного поля в волноводе уравнение Шредингера допускает разделение переменных, а соответствующее уравнение для поперечной волновой функции $\varphi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(\lambda + Ey)\varphi = 0$ переходит в уравнение Эйри $\varphi'' + z\varphi = 0$, где $z = (y + \frac{\lambda}{E})p^{1/3}$, $p = \frac{2mE}{\hbar^2}$, λ — спектральный параметр, y — поперечная координата. Общее решение уравнения Эйри имеет вид $\varphi(z) = C\,Ai(-a) + D\,Bi(-z)$, где функции Эйри Ai, Bi при больших по модулю значениях аргумента (при малых E) имеют асимптотики:

$$Ai(-z) = z^{-1/4}\left(\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + o(z^{-3/2})\right),$$

$$Bi(-z) = z^{-1/4}\left(\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + o(z^{-3/2})\right).$$

Согласно вариационным принципам, для доказательства существования собственного значения ниже порога непрерывного спектра достаточно найти пробную функцию, для которой отношение $\frac{M(\psi)}{\|\psi\|^2}$ принимает отрицательное значение. Здесь

$$M(\psi) = (H\psi, \psi) - \mu\|\psi\|^2,$$

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \mu = \frac{\lambda}{E}p^{1/3}.$$

Выберем пробную функцию в виде $\psi(x, y) = F(x, y) + G(x, y)$ [6], слагаемое F описывает поведение электрона на участке волновода вне отверстия, а слагаемое G представляет функцию электрона на отверстии:

$$F(x, y) = \alpha U(x)V(y), \quad G(x, y) = \eta P(x)R(y),$$

α, η — константы, которые будут выбраны при построении.

Функции U, P можно выбрать так же, как это было сделано в случае отсутствия электрического поля [3]:

$$U(x) = \min\{1, e^{-k(|x|-a)}\}, \quad P(x) = \cos\frac{\pi x}{2a}\chi_{[-a,a]}(x),$$

где $\chi_{[-a,a]}(x)$ — характеристическая функция отверстия, параметр k будет выбран ниже. В качестве функций V, R возьмем следующие:

$$V(y) = C\left(y + \frac{\lambda}{E}\right)^{-1/4} p^{-1/12}\sin\left(\frac{2}{3}\left(y + \frac{\lambda}{E}\right)^{3/2} p^{1/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$+ D\left(y + \frac{\lambda}{E}\right)^{-1/4} p^{-1/12}\cos\left(\frac{2}{3}\left(y + \frac{\lambda}{E}\right)^{3/2} p^{1/2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$R(y) = \begin{cases} e^{-\frac{\pi y}{2a}}, & y \in \left[0, \frac{d}{2}\right], \\ 4\left(1 - \frac{y}{d}\right)^2 e^{-\frac{\pi d}{4a}}, & y \in \left[\frac{d}{2}, d\right]. \end{cases}$$

При этом поведение $R(y)$ на интервале $[-d, 0]$ будет описываться ее четным продолжением на парный волновод.

Требуемые утверждения получаем следующим путем. Форма M приводится к виду:

$$M(\psi) = \|F_x'\|^2 + \|G_x'\|^2 + \|G_y'\|^2 - \frac{\lambda}{E}p^{1/3}\|G\|^2 - 2\int\limits_{-a}^{a}(\bar{G}F_y' + G\bar{F}_y')\big|_{y=0}dy.$$

Для формы M на пробной функции получаем оценку сверху:

$$M(\psi) < \alpha^2 k\int\limits_0^d V^2(y)dy + \eta^2\frac{\pi}{2}(2 + \varepsilon_1)$$
$$- 16\eta\frac{a}{\pi}\alpha p^{-1/12}\left(\frac{\lambda}{E}\right)^{-5/4}\sqrt{C^2 + D^2}\sqrt{p\left(\frac{\lambda}{E}\right)^3 + \frac{1}{16}}\cos\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3}\left(\frac{\lambda}{E}\right)^{3/2} p^{1/2} + \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{4} C\left(\frac{E}{\lambda}\right)^{3/2} + D p^{1/2}}{C p^{1/2} - \frac{1}{4} D\left(\frac{E}{\lambda}\right)^{3/2}}.$$

При этом норма пробной функции имеет следующую оценку сверху:

$$\|\psi\|^2 \leqslant \frac{\alpha^2}{k} \int\limits_0^d V^2(y) dy (2 + \varepsilon_2).$$

В результате получаем следующее утверждение. В спектре оператора Лапласа с граничными условиямии Неймана для системы из двух идентичных квантовых волноводов шириной d, связанных через отверстие шириной $2a$ и находящихся в поперечном электрическом поле напряженности E, существует собственное значение вблизи границы непрерывного спектра, отстоящее от него на расстояние δ, величина которого оценивается следующим неравенством:

$$\delta \geqslant \frac{2^{12} a^4 \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2} + \frac{E^2}{16\lambda^2}\right)^2}{\pi^6 d^2 (2 + \varepsilon_1)^2 (2 + \varepsilon_2)},$$

где $\sqrt{\lambda} = \sqrt{\Lambda} - \frac{dE}{4\sqrt{\Lambda}}$.

Заметим, что при $E \to 0$ правая часть неравенства переходит в оценку, полученную в [3] для случая отсутствия электрического поля:

$$\delta \geqslant \frac{2^{12} a^4}{\pi^2 d^6 (2 + \varepsilon_3)^2 (1 - \varepsilon_4)},$$

где ε_3, ε_4 — некоторые константы.

Итак, в работе доказано существование связанного состояния электрона в системе квантовых волноводов, соединенных малым отверстием при наличии поперечного электрического поля, и получена оценка положения данного связанного состояния.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-90410 и Министерством образования и науки РФ. Работа поддержана в рамках Программы „Развитие научного потенциала высшей школы 2009–2010 г.“ (проект 2.1.1/4215).

Список литературы

[1] *Алфёров Ж.И., Асеев А.Л., Гапонов С.В., Копьев П.С., Сурис Р.А.* // Наноматериалы и нанотехнологии. 1 ч. Аналитика. 2008. С. 1–2.
[2] *Hor J.C.* et al. // Nature Mater. 2008. V. 7. P. 62.
[3] *Exner P.* // Cont. Math. 1998. V. 217. P. 69–82.
[4] *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006. 824 с.
[5] *Гаврилов М.И., Гортинская Л.В., Пестов А.А., Попов И.Ю., Тесовская Е.С.* // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4. № 2 (138), С. 237–243.
[6] *Мельничук О.П., Попов И.Ю.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. В. 8. С. 69–73.