

09

Определение времени задержки по отклику системы на слабое импульсное воздействие

© В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники
им. В.А. Котельникова РАН
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 4 июня 2009 г.

Предложен новый метод восстановления времени задержки, основанный на анализе отклика системы с запаздыванием на слабое внешнее воздействие в виде прямоугольных импульсов. Метод применим к системам, находящимся как в периодических, так и в хаотических режимах колебаний. Эффективность метода продемонстрирована на численных примерах и на экспериментальной радиофизической системе.

PACS: 05.45.Tp

Автоколебательные системы с запаздывающей обратной связью широко распространены в природе и технике. Их распространенность обусловлена тем, что запаздывание реакции на сигнал и обратная связь с запаздыванием присущи многим физическим, химическим, климатическим и биологическим объектам и процессам [1–4]. При исследовании систем с запаздыванием важно знать значения временных задержек, величина которых во многом определяет динамику системы. Для решения этой задачи были предложены различные методы, позволяющие восстановить времена запаздывания систем по хаотическим временным рядам их колебаний [5–12]. Однако эти методы оказываются неэффективными, если система с запаздыванием находится в периодическом режиме [13]. Вместе с тем многие практически важные системы с задержкой функционируют в периодических или близких к периодическим режимам [14,15]. Поэтому весьма актуальной является разработка методов, позволяющих определять по временным рядам параметры систем с запаздыванием, совершающих не только хаотические, но и периодические колебания.

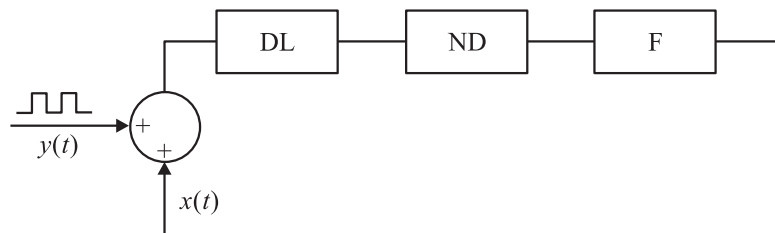


Рис. 1. Блок-схема кольцевой системы с запаздыванием, возбуждаемой внешним импульсным сигналом. DL — линия задержки, ND — нелинейный элемент, F — фильтр.

Такие методы начали разрабатываться совсем недавно [16–19]. Они основаны на возмущении системы с запаздыванием внешним воздействием и анализе отклика. При этом использовалось шумовое воздействие [16], периодическое [17] или воздействие специального вида, приводящее к подавлению колебаний [18]. Во всех перечисленных случаях требовалась большая амплитуда воздействия, сопоставимая с амплитудой собственных автоколебаний или превышающая ее. Однако использование сильного воздействия не всегда оказывается возможным. Зачастую более предпочтительным является воздействие на систему слабым внешним сигналом. Такой подход, использующий метод накопления, был предложен нами в [19], однако воздействие имело сложный вид, затрудняющий его применение на практике.

В данной работе мы предлагаем новый метод определения времени задержки, основанный на анализе отклика системы на слабое импульсное воздействие простого вида, который применим к системам, находящимся и в периодических, и в хаотических режимах колебаний.

Рассмотрим кольцевую автоколебательную систему с запаздывающей обратной связью, состоящую из линии задержки, нелинейного элемента и фильтра (рис. 1), совершающую автоколебания $x(t)$. Будем воздействовать на систему внешним сигналом $y(t)$, представляющим собой прямоугольные импульсы с амплитудой A , периодом T и длительностью M . Вид модельного уравнения, описывающего такую систему, определяется параметрами фильтра и тем, в какой точке внешний сигнал вводится в кольцевую систему с запаздыванием. В случае, когда фильтр является низкочастотным фильтром первого порядка, а сигнал $y(t)$ вводится в систему между фильтром и линией задержки (рис. 1),

рассматриваемая автоколебательная система описывается дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau) + y(t - \tau)), \quad (1)$$

где τ — время запаздывания, ε — параметр, характеризующий инерционные свойства системы, f — нелинейная функция.

Как видно из уравнения (1), результат воздействия $y(t)$ проявится в поведении системы только через время τ после его начала. Аналогично, прекращение внешнего воздействия скажется на поведении системы лишь через время τ после его окончания. Если $y(t)$ имеет вид прямоугольных импульсов, начинающихся в моменты времени $t = nT$ и заканчивающихся в моменты времени $t = nT + M$, $n = 1, 2, \dots$, то траектория $x(t)$ будет претерпевать возмущения при $t = nT + \tau$ и $t = nT + M + \tau$. При этом на реализации $x(t)$ появляются изломы, которые при малой амплитуде воздействия практически незаметны. Изменение динамики системы становится более заметным, если численно продифференцировать $x(t)$ по времени. Зависимость $\dot{x}(t)$ демонстрирует скачок через время τ после начала и после окончания импульса. Наиболее удобна для анализа отклика системы на внешнее воздействие вторая производная $\ddot{x}(t)$. Ее временная реализация демонстрирует узкие пики или провалы через время τ после прохождения переднего и заднего фронтов прямоугольного импульса, хорошо заметные даже при малых амплитудах воздействия.

При исследовании корреляций между воздействием и откликом системы следует использовать сигналы, над которыми совершаются одинаковые преобразования. Так, взаимная корреляционная функция $\dot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ позволяет оценить τ . Однако в силу того, что численно полученная оценка $\ddot{y}(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения вблизи фронта импульса, времени запаздывания соответствует нулевое значение этой корреляционной функции, расположенное между основным максимумом и минимумом. Более наглядной и удобной для определения τ является взаимная корреляционная функция

$$C(s) = \frac{\langle |\ddot{y}(t)| |\dot{x}(t + s)| \rangle}{\sqrt{\langle |\ddot{y}(t)|^2 \rangle \langle |\dot{x}(t)|^2 \rangle}},$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Величина $|\ddot{y}(t)|$ принимает только положительные значения на фронтах импульса, и $C(s)$ имеет четко выраженный максимум при $s = \tau$ (рис. 2, а).

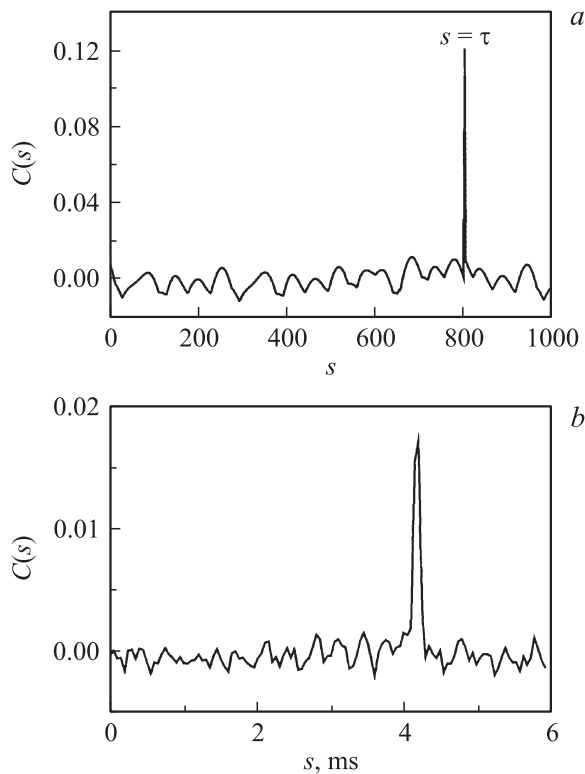


Рис. 2. Взаимная корреляционная функция (2), построенная по численным (а) и экспериментальным (б) данным для случая, когда система (1) совершает периодические в отсутствие внешнего воздействия колебания.

Проиллюстрируем метод на примере системы (1) при $\tau = 800$, $\varepsilon = 20$, $f(x) = \lambda - x^2$, где λ — параметр нелинейности. При $\lambda = 1$ в отсутствие воздействия система демонстрирует периодические автоколебания с амплитудой $A_a = 1$ и периодом $T_a = 1638$. В качестве внешнего воздействия возьмем меандр с $A = 0.01$, $T = 1900$, $M = T/2$. Функция (2), построенная при шаге изменения s , равном 1, имеет высокий максимум при $s = \tau = 800$ (рис. 2, а) и позволяет точно восстанавливать время запаздывания при амплитудах воздействия

$A \geq 0.002$. Для оценки производных $\dot{x}(t)$ и $\ddot{y}(t)$ по временным рядам $x(t)$ и $y(t)$ мы использовали простейшую разностную схему. График построен по 20 000 точек, однако, метод позволяет использовать более короткие ряды. При указанных значениях параметров для точного восстановления τ достаточно всего 3500 точек, т.е. двух импульсов. В случае хаотического поведения системы (1) функция (2) имеет вид, качественно подобный приведенному на рис. 2, а.

Отметим, что количество пиков $C(s)$ при $s \in [0; \tau]$ определяется отношениями T/τ и M/T . При $M = T/2$ времени запаздывания соответствует первый пик $C(s)$, если $T \geq 2\tau$ (рис. 2, а), и k -й пик $C(s)$, если $2\tau/k \leq T \leq 2\tau/(k-1)$, $k = 2, 3, \dots$. Известно, что для основной моды периодических колебаний $\tau < T_a/2$, где T_a — период автоколебаний системы с задержкой. Поэтому рекомендуется выбирать $T \geq T_a$ и при $M = T/2$ восстанавливать τ по положению первого пика $C(s)$. Если более предпочтительно использование импульсов с малым периодом или не известно, является ли наблюдаемая мода колебаний основной, а также в случае хаотических колебаний следует подействовать на систему сначала импульсным сигналом с $T = T_1$, а затем с $T = T_2$, близким к T_1 , и сравнить функции $C(s)$ для первого и второго случаев. При $M = T/2$ расстояние между пиками $C(s)$ всегда равно $T/2$, поэтому при разных T пики наблюдаются при разных s . Неизменным остается лишь положение пика, соответствующего времени запаздывания. Обнаружив такой пик, мы определим τ .

Если $M \neq T/2$, то на графике $C(s)$ появляется дополнительный пик между $s = 0$ и $s = \tau$. Однако, пик $C(s)$ при $s = \tau$ по-прежнему будет наибольшим. Таким образом, величина M может быть выбрана в очень широких пределах. Метод позволяет использовать даже очень короткие импульсы ($M < T/100$) без увеличения их амплитуды, что может быть полезным, когда воздействие на систему желательно свести к минимуму.

Рассмотрим применение метода к экспериментальным временным рядам радиотехнического кольцевого генератора с запаздывающей обратной связью, находящегося под действием внешнего импульсного сигнала (рис. 1). В качестве нелинейного элемента использован выполенный на полевых транзисторах усилитель с квадратичной передаточной характеристикой f . Инерционность генератора определяется низкочастотным RC -фильтром первого порядка, сопротивление R и емкость C которого задают величину $\varepsilon = RC$. Динамика генератора

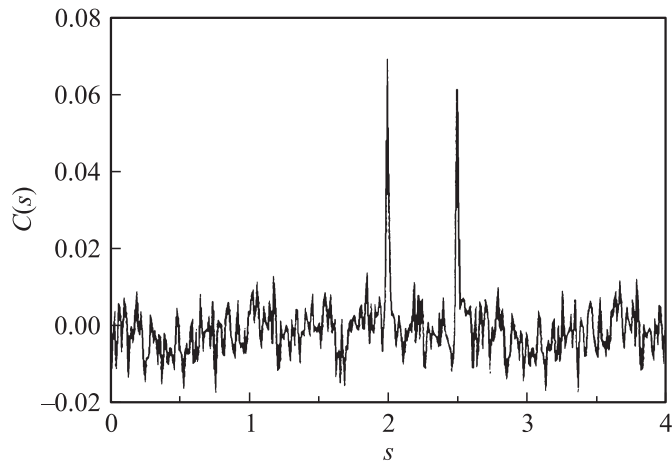


Рис. 3. Взаимная корреляционная функция (2) для случая, когда система (3) совершает хаотические колебания.

описывается уравнением (1), где $x(t)$ и $x(\tau - x)$ — напряжения на входе и выходе линии задержки соответственно. При параметрах $\tau = 4.16$ ms и $\varepsilon = 0.46$ ms генератор демонстрировал в отсутствие внешнего воздействия периодические автоколебания с амплитудой $A_a = 1.5$ V и периодом $T_a = 9.2$ ms. С помощью АЦП с частотой выборки $f_s = 20$ кГц мы записывали сигналы $x(t)$ и $y(t)$ при параметрах внешнего воздействия $A = 20$ mV, $T = 11.1$ ms, $M = T/2$. На рис. 2, б построена функция (2). При шаге изменения s , равном 0.05, она имеет максимум при $s = 4.2$ ms, т.е. время τ восстанавливается с высокой точностью.

Метод может быть распространен на системы с несколькими временами запаздывания. Проиллюстрируем его эффективность на примере обобщенного уравнения Икеды, получаемого введением второго времени запаздывания, в присутствии динамического шума.

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \lambda [\sin(x(t - \tau_1) + y(t - \tau_1)) + \sin(x(t - \tau_2) + y(t - \tau_2))] + \xi(t).$$

При $\lambda = 10$, $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 2.5$ система (3) демонстрирует хаотическую динамику. На рис. 3 приведен график функции (2) для случая, когда на

систему действуют импульсный сигнал $y(t)$ с $A = 0.5$, $T = 5.2$, $M = T/2$ и 20%-й гауссовский белый шум $\xi(t)$ с нулевым средним значением. При шаге изменения s , равном 0.01, первые два пика $C(s)$ расположены при $s = 2.00$ и $s = 2.50$, т.е. времена запаздывания восстанавливаются точно, несмотря на высокий уровень шума. Для указанных значений параметров времена задержки τ_1 и τ_2 восстанавливаются точно при уровне шума, достигающем 40%. Аналогичные результаты получаются при применении метода к периодическим режимам системы (3). Таким образом, метод оказывается очень устойчивым к шуму, в отличие, например, от метода, предложенного в [18] и работоспособного лишь при уровне шума менее 1%.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07-02-00589, и целевой программы „Развитие научного потенциала высшей школы“.

Список литературы

- [1] Mackey M.C., Glass L. // *Science*. 1977. V. 197. P. 287–289.
- [2] Ikeda K. // *Opt. Commun.* 1979. V. 30. P. 257–261
- [3] Kuang Y. *Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics*. Boston. Academic Press, 1993.
- [4] Мохов И.И., Смирнов Д.А. // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2006. Т. 42. № 5. С. 650–667.
- [5] Voss H., Kurths J. // *Phys. Lett. A*. 1997. V. 234. P. 336–344.
- [6] Hegger R., Büchner M.J., Kantz H., Giaquinta A. // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 81. P. 558–561
- [7] Büchner M.J., Ciofini M., Giaquinta A. et al. // *Eur. Phys. J. D*. 2000. V. 10. P. 165–176.
- [8] Horbelt W., Timmer J., Voss H.U. // *Phys. Lett. A*. 2002. V. 299. P. 513–521.
- [9] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваяев А.С., Безручко Б.П. // *ЖЭТФ*. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527. [*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* // *JETP*. 2005. V. 100. N. 3. P. 457–467.]
- [10] Frank T.D., Friedrich R., Beek P.J. // *Stochastics and Dynamics*. 2005. V. 5. P. 297–306.
- [11] Прохоров М.Д., Пономаренко В.И. // *Письма в ЖТФ*. 2008. Т. 34. В. 8. С. 29–35. [*Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* // *Tech. Phys. Lett.* 2008. V. 34. N 4. P. 331–334.]
- [12] Безручко Б.П., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. и др. // *УФН*. 2008. Т. 178. В. 3. С. 323–329. [*Bezruchko V.P., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* et al.] // *Physics-Uspokhi*. 2008. V. 51. N 3. P. 304–310.

- [13] *Strogoneriu L., Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2004 V. 70 P. 046213.
- [14] *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969, 288 с.
- [15] *Glass L., Mackey M.C.* From Clock to Chaos: The Rhythms of Life. Princeton: Princeton University Press, 1988.
- [16] *Siefert M.* // Phys. Rev. E. 2007 V. 76. P. 026215.
- [17] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 11. С. 62–67. [*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Tech. Phys. Lett. 2008. V. 34. N 6. P. 483–485.]
- [18] *Yu D., Frasca M., Liu F.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 046209
- [19] *Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 066207