01

# К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау

© А.А. Короновский, О.И. Москаленко, Н.С. Фролов, А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского
E-mail: alkor@nonlin.sgu.ru

*Поступило в Редакцию 26 февраля 2010 г.*

Предложен метод расчета спектра пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем. Апробация метода осуществлена на примере распределенной нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау с периодическими граничными условиями.

Использование динамического хаоса на сегодняшний день представляет большой интерес для целого ряда практических приложений, связанных со сверхширокополосными системами связи [1,2], скрытой передачей информации [3], мощными источниками СВЧ-излучения [4], электронно-волновыми системами с виртуальным катодом [5] и т. п. В качестве количественных величин, позволяющих охарактеризовать наблюдаемые хаотические режимы и обнаружить качественные изменения в динамике систем при варьировании управляющих параметров, часто используются показатели Ляпунова. В частности, использование показателей Ляпунова позволяет обнаружить переход от хаотического режима к гиперхаосу [6], выявить наличие гиперболического аттрактора [7], детектировать обобщенную синхронизацию [8] или индуцированную шумом синхронизацию [9,10], проанализировать процессы на границе синхронной динамики автоколебательных систем [11] и т. д.

Следует, однако, отметить, что методика определения показателей Ляпунова (как с помощью расчетов по модельным уравнениям, так и по экспериментальным данным) хорошо разработана и апробирована в основном для конечномерных систем с малым числом степеней свободы. Представляется перспективным использовать этот инструмент и для анализа динамики более сложных систем, таких как системы с бесконечномерным фазовым пространством [12,13]. Однако напрямую вычислить показатели Ляпунова для таких систем, используя алгоритмы, разработанные и апробированные для систем с малым числом степеней свободы, оказывается проблематично. В то же самое время, распределенные системы являются весьма распространенным классом моделей реальных физических систем, в частности систем электронной природы, в том числе приборов и устройств электроники сверхвысоких частот и радиофизики, таких как лампа обратной волны [14], виркаторы [15], клистронные автогенераторы [16,17], гироприборы [18]. Поэтому необходимо определить количественные характеристики, аналогичные показателям Ляпунова, для систем с сосредоточенными параметрами, которые можно было бы использовать при анализе поведения пространственно-распределенных нелинейных систем. Особенно это важно при изучении синхронизации подобных систем (например, в задачах передачи информации с использованием явления хаотической синхронизации [3]), так как диагностика синхронных хаотических режимов часто определяется воможностью оценки спектра ляпуновских экспонент [3,13,17].

Очевидно, что для пространственно-распределенных систем, характеризующихся бесконечным числом пространственных показателей Ляпунова, возникает необходимость определения нескольких (старших) пространственных показателей. Методика расчета этих величин является следующей. Пусть

$$L\big(u(x,t)\big) = 0 \tag{1}$$

— оператор, описывающий поведение пространственно-распределенной системы с течением времени, $u(x,t)$ — величина, зависящая от пространственной координаты $x$ и времени $t$ и характеризующая состояние системы.

При расчете спектра пространственных показателей Ляпунова функция состояния $u(x,t)$ будет выступать в качестве опорного состояния, относительно которого будет рассматриваться поведение малых возмущений. Для вычисления первых $N$ старших пространственных показателей Ляпунова необходимо ввести в рассмотрение набор возмущений

$v_i(x,t)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$(u, v) = \int\limits_L u(x,t) v^*(x,t) dx \tag{3}$$

— скалярное произведение соответствующих функций, звездочка обозначает комплексное сопряжение, интеграл в (3) берется по всей длине $L$ рассматриваемой системы.

Дополнительно к условию ортогональности (2) все возмущения $v_i(x,t)$ должны также удовлетворять условию нормировки

$$||v_i(x,0)|| = 1. \tag{4}$$

Набор возмущений $v_i(x,t)$, удовлетворяющих условиям (2) и (4), может быть получен с помощью процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта [19]

$$\begin{cases} v_i = \dfrac{\tilde{v}_i(x,0)}{\| \tilde{v}_i(x,0) \|} = \dfrac{\tilde{v}_i(x,0)}{\sqrt{(\tilde{v}_i(x,0), \tilde{v}_i(x,0))}}, \\ \tilde{v}_1(x,0) = \varphi_1(x), \\ \tilde{v}_{i+1}(x,0) = \varphi_{i+1}(x) - \sum\limits_{k=1}^{i} (v_k, \varphi_{i+1}) v_k(x,0) \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \tag{5}$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_N(x)$ — набор линейно независимых произвольных функций, определенных на длине $L$ рассматриваемой системы.

Для вычисления спектра пространственных показателей Ляпунова пространственно-распределенной системы необходимо рассматривать эволюцию во времени как состояния $u(x,t)$ исследуемой системы, так и всех возмущений $v_i(x,t)$. Эволюция состояния $u(x,t)$ определяется соотношением (1), в то время как эволюция возмущений $v_i(x,t)$ будет определяться оператором эволюции

$$\partial \hat{L}\big(u(x,t), v_i(x,t)\big) = 0, \tag{6}$$

который получается линеаризацией оператора (1) в окрестности состояния $u(x,t)$.

По истечении интервала времени длительностью $T$ полученный набор возмущений $\upsilon_i(x,T)$ снова подвергается процедуре ортогонализации и нормализации по Грамму–Шмидту, при этом в качестве набора функций $\varphi_i(x)$ выступает рассматриваемое множество возмущений $\upsilon_i(x,T)$, иными словами,

$$\varphi_i(x) = \upsilon_i(x,T). \tag{7}$$

Описанная последовательность действий повторяется достаточно большое число раз $M$, при этом по мере проведения вычислений подсчитываются суммы

$$S_i = \sum_{j=1}^{M} \ln ||\tilde{\upsilon}_i(x, jT)||, \tag{8}$$

в которых используются возмущения до перенормировки, но после ортогонализации. Оценка значений пространственных показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем определяется как

$$\Lambda_i = \frac{S_i}{MT}, \qquad i \in Z. \tag{9}$$

Апробация описанного метода расчета пространственных показателей Ляпунова была проведена на примере пространственно-распределенной активной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау

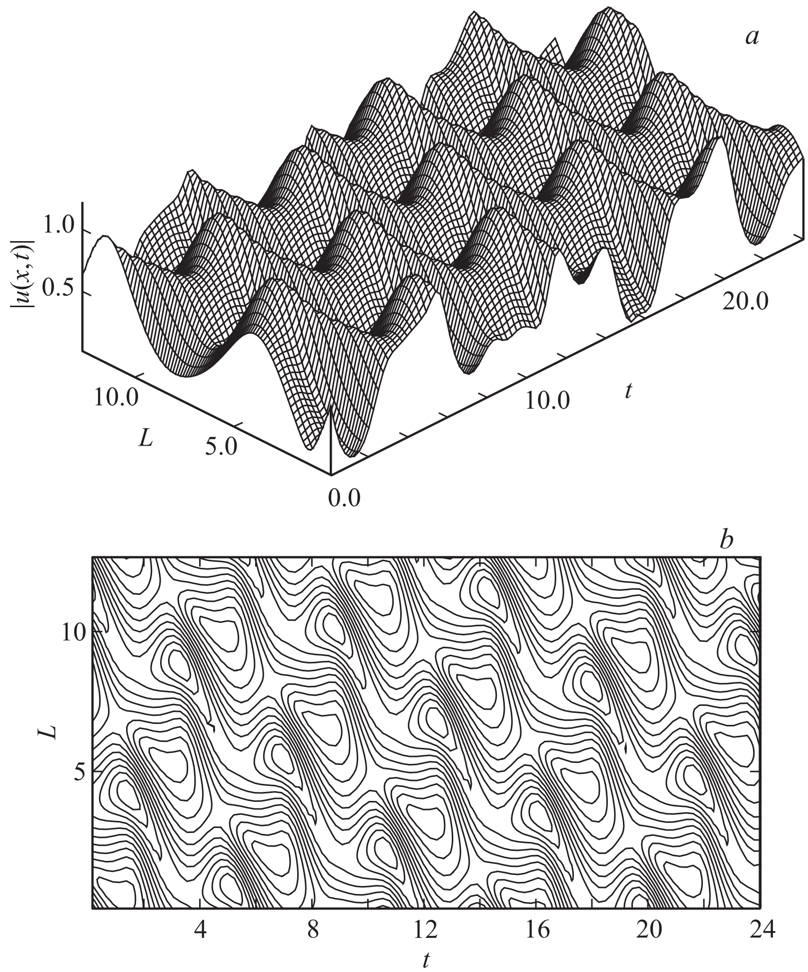
$$\frac{\partial u}{\partial t} = u - (1 - i\alpha_d)|u^2|u + (1 + i\beta_d)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x \in [0, L], \tag{10}$$

с периодическими граничными условиями

$$u(x,t) = u(x+L,t), \tag{11}$$

где $L$ — пространственный период системы. Выбор подобной системы обусловлен тем, что уравнение (10) является общепризнанной эталонной моделью, описывающей процесы физики лазеров [20] и демонстрирующей универсальные черты формирования структур [21].

В качестве состояния системы выступает комплексное поле $u(x)$, так что $\mathbf{R}(x) = \{\mathrm{Re}\,u(x), \mathrm{Im}\,u(x)\}$. Параметры системы были выбраны




Эволюция решения $|u(x,t)|$ уравнения Гинзбурга–Ландау (1) с течением времени ($a$) и линии уровня, соответствующие поверхности $|u(x,t)|$ ($b$).

$\alpha = 4.0$ и $\beta = -4.0$. При значении управляющего параметра $L = 4\pi$ система демонстрирует поведение, показанное на рисунке. Из расположения линий уровня, представленных на рисунке и иллюстрирующих этот режим, отчетливо видно, что в системе реализуется регулярный режим, при котором с течением времени максимумы величины $|u(x,t)|$ сдвигаются вдоль пространства системы с течением времени, при этом через определенные интервалы времени состояние системы снова повторяется с точностью до некоторого пространственного сдвига $\Delta$.

Оператор эволюции (6) возмущений $v_i(x,t)$ пространственно-временнóго состояния $u(x,t)$ для рассматриваемой системы, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау (1), примет вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \bigl(1 - 2(1 - i\alpha)|u(x,t)|^2\bigr) v_i(x,t)$$
$$- (1 - i\alpha) u(x,t) v_i^*(x,t) + (1 + i\beta)\, \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2}. \tag{12}$$

Очевидно, что наблюдаемый регулярный режим должен характеризоваться двумя нулевыми старшими показателями Ляпунова, один из которых соответствует возмущениям вдоль длины системы, а второй — вдоль оси времени. Остальные показатели Ляпунова, с учетом регулярного характера поведения системы, дложны быть отрицательными. Результаты расчета (с точностью до второго знака после запятой) дают следующий набор значений для первых старших десяти показателей Ляпунова: $\Lambda_1 = 0.00, \Lambda_2 = 0.00$, $\Lambda_3 = -0.01$, $\Lambda_4 = -0.08$, $\Lambda_5 = -0.12$, $\Lambda_6 = -0.48$, $\Lambda_7 = -0.76$, $\Lambda_8 = -1.57$, $\Lambda_9 = -2.05$, $\Lambda_{10} = -2.24$.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен вопрос о спектре пространственных показателей Ляпунова для нелинейной активной распределенной среды, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау. Предложенный метод определения пространственно-распределенных показателей Ляпунова может быть применен и для хаотических режимов, которые наблюдаются в системе, описываемой комплексным уравнением Гинзбурга–Ландау (1) при изменении значений управляющих параметров, например при увеличении длины системы $L$. В этом случае старшие показатели Ляпунова становятся положительными, число положительных показателей Ляпунова зависит от наблюдаемого режима, причем с усложнением динамики системы увеличивается число старших положительных пространственно-распределенных показателей Ляпунова.

Работа выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 годы.

## Список литературы


[1] *Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Никишов А.Ю.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 9. С. 82.
[2] *Мишагин К.Г., Матросов В.В., Шалфеев В.Д.* и др. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 24. С. 31.
[3] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // УФН. 2009. Т. 179. N 12. С. 1281–1310.
[4] *Булычев С.В., Дубинов А.Е., Львов И.Л.* и др. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. В. 11. С. 51.
[5] *Егоров Е.Н., Калинин Ю.А., Короновский А.А.* и др. // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 9. С. 71.
[6] *Ксиу-КинФенг, КиШен.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 13. С. 78.
[7] *Емельянов В.В., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. В. 16. С. 71.
[8] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 067201.
[9] *Goldobin D.S., Pikovsky A.S.* // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 045201.
[10] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // Phys. Lett. A. 2006. V. 354. P. 423.
[11] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K.* // Phys. Rev. E. 2008. V. 78. P. 036212.
[12] *Короновский А.А., Попов П.В., Храмов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. N 4 (10). С. 748.
[13] *Кузнецов С.П., Трубецков Д.И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. Т. 47. С. 383.
[14] *Ермаков А.Е., Жаков С.В., Месяц Г.А.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. В. 18. С. 76.
[15] *Филатов Р.А., Калинин Ю.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. В. 11. С. 61.
[16] *Стародубов А.В., Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. В. 14. С. 58.
[17] *Dmitriev B.S., Hramov A.E., Koronovskii A.A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. P. 074101.
[18] *Nusimovich G.S., Vlasov A.N., Antonsen T.M.* // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 218301.
[19] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001.
[20] *Coullet P., Gil L., Roca F.* // Opt. Commun. 1989. V. 73. P. 403.
[21] *Cross M., Hohenberg P.* // Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 851.