

03

## **Самоиндуцированный отрыв ламинарного пограничного слоя и процессы вязко-невязкого взаимодействия над пористой поверхностью**

© Д.С. Данилов, И.И. Липатов, Г.Ю. Толкачев

Центральный аэродинамический институт,  
Жуковский, Московская область  
E-mail: danilov1984@gmail.com,  
igor\_lipatov@mail.ru  
Московский физико-технический институт

*Поступило в Редакцию 23 марта 2010 г.*

Исследование локальное течение в пограничном слое в окрестности пористого элемента поверхности. На основе асимптотического анализа сформулированы математические модели и определены параметры подобия. Представлены численные и аналитические результаты, описывающие процессы вязко-невязкого взаимодействия ламинарных течений около пористых поверхностей. Такой метод пассивного управления течением в пограничном слое может использоваться для устранения отрыва, а также для затягивания ламинарно-турбулентного перехода. Показано, что давление в точке отрыва при увеличении коэффициента пористости практически не меняется, в то время как градиент давления увеличивается. Это означает, что длина области возмущенного течения уменьшается с ростом коэффициента пористости.

Создание новых материалов, в частности технология производства пористых металлов, привели к возможности разработки новых методов управления течением в пограничном слое. Такого рода методы могут быть использованы для устранения отрыва пограничного слоя или для затягивания ламинарно-турбулентного перехода.

Структура пористого металла позволяет обеспечивать отсос (вдув) газа на поверхности вследствие разности давлений на внешней и внутренней поверхностях пористой пластины. Во многих случаях можно предположить, что распределенный массообмен подчиняется закону Дарси или реализуется линейная зависимость между распределением

вертикальной скорости на поверхности и распределением перепада давления.

С математической точки зрения это условие позволяет пересмотреть многие ранее полученные классические результаты для описания самоиндуцированного отрыва в случае пассивного управления течением в пограничном слое. Соответствующая модель включает в себя уравнения пограничного слоя с дополнительным условием, определяющим распределение давления. Оказалось, что для случая нестационарного самоиндуцированного отрыва или для описания процессов длинноволновой неустойчивости необходимо рассматривать модифицированный закон Дарси, учитывающий запаздывание по времени.

Существенно, что граничное условие на стенке, описывающее связь между вертикальной скоростью и перепадом давления, является линейной и не меняет однородность линейной задачи. Граничное условие этого вида позволяет пересмотреть ранее полученные результаты [1–4], описывающие самоиндуцированный отрыв пограничного слоя.

Используя полученные в [1] результаты, задачу можно записать следующим образом:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad p = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad (1)$$

$u = 0$ ,  $v = -\beta p$  при  $y = 0$ ;  $u = y + A(x)$  при  $y \rightarrow \infty$ ;  $u = y$  при  $x \rightarrow -\infty$ , где для безразмерных параметров, соответствующих декартовым координатам, отсчитываемым вдоль поверхности и по нормали к ней, для компонентов вектора скорости, давления, толщины вытеснения и коэффициента пористости приняты следующие обозначения  $x, y, u, v, p, A, \beta$ . Эта задача отличается от задачи, описывающей возмущенное течение около непроницаемой стенки вследствие появления условия для вертикальной скорости на стенке [1–2].

Для малых возмущений решение представимо в виде  $u = y + u_1$ ,  $p = p_1$ . Такое решение приводит к следующему виду уравнений в первом приближении:

$$y \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Решение задачи представимо в виде  $(u_1, v_1, p_1, A) = e^{\alpha x}(U, V, P, B)$ ,

$$y\alpha U + V + \alpha P = U'', \quad \alpha U + V' = 0, \quad U(\infty) = B. \quad (3)$$

После ряда преобразований можно получить уравнение Эйри

$$y = \alpha^{-1/3}Y, \quad U' = F, \quad YF = F'', \quad (4)$$

имеющее следующее решение  $F = CAi(Y)$ :

$$U(\infty) = \int_0^{\infty} F dY = C\alpha^{-1/3} \int_0^{\infty} Ai(Y) dY = \frac{C}{3\alpha^{1/3}}, \quad (5)$$

$$P = -\alpha B = -\frac{C\alpha^{2/3}}{3}, \quad (\alpha - \beta)P = \alpha^{2/3}U_w'' = C\alpha^{1/3}Ai'(0),$$

$$-\frac{C\alpha^{2/3}}{3}(\alpha - \beta) = C\alpha^{1/3}Ai'(0).$$

Вводя новые переменные  $\alpha^{1/3}(\alpha - \beta) = -3Ai'(0)$ ,  $\alpha = \delta^3\beta$ , окончательно приходим к соотношению, связывающему инкремент роста возмущений и параметр проницаемости стенки  $\delta(\delta^3 - 1) = -\frac{3Ai'(0)}{\beta^{4/3}}$ . Можно рассмотреть два предельных случая. Первый соответствует малому коэффициенту пористости  $\beta \ll 1$ :

$$\delta \approx \left[ -\frac{3Ai'(0)}{\beta^{4/3}} \right]^{1/4} \approx \frac{1}{\beta^{1/3}} [-3Ai'(0)]^{1/4}. \quad (6)$$

Тогда, поскольку  $\alpha = \delta^3\beta$ , можно получить

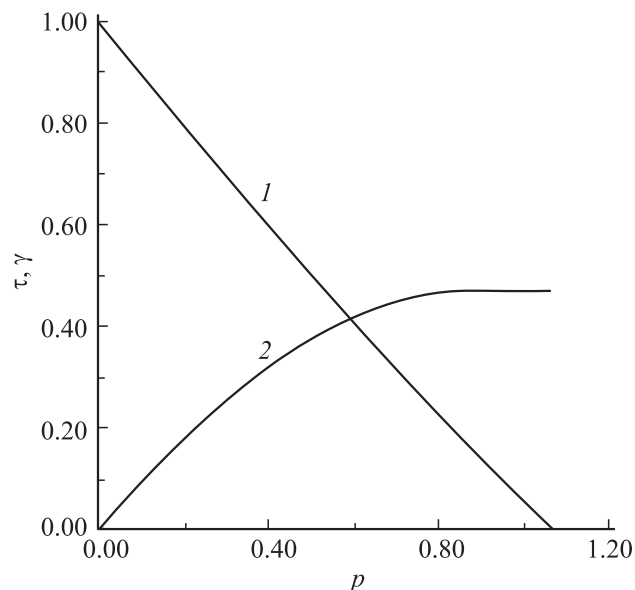
$$\alpha \approx [-3Ai'(0)]^{3/4}. \quad (7)$$

Аналогичный результат получен для непроницаемой стенки [1–2]. В другом предельном случае при больших значениях коэффициента пористости  $\beta \rightarrow \infty$

$$\delta \approx 1, \quad \alpha \approx \beta, \quad \beta \gg 1. \quad (8)$$

Тогда большие величины инкремента роста  $\alpha$  соответствуют малым величинам протяженности области возмущенного течения.

В общем случае задача (1) должна быть решена численно. Численный метод описан в [3–4]. В результате расчетов получены распределения индуцированного градиента давления и поверхностного трения как функции индуцированного возмущения давления. Отметим, что и распределение толщины вытеснения  $A(x)$  неизвестно заранее и

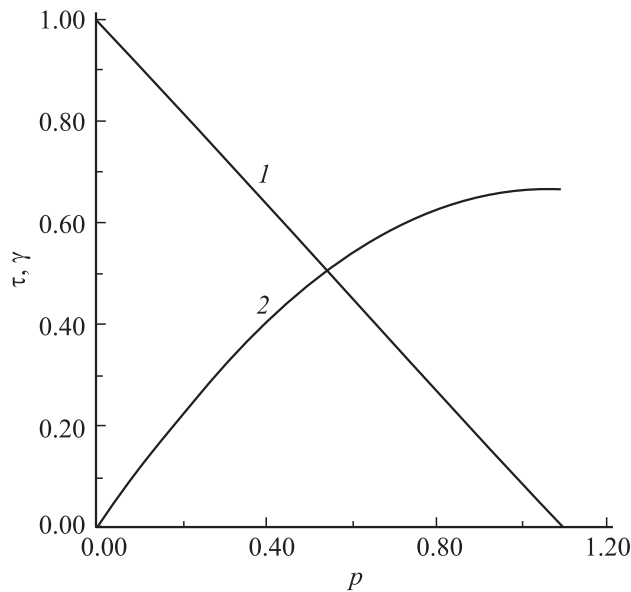


**Рис. 1.** Распределение поверхностного трения  $\tau = \partial u / \partial y$  (кривая 1) и индуцированный градиент давления  $\gamma = \partial p / \partial x$  (кривая 2) как функции индуцированного распределения давления  $p$  при  $\beta = 0.25$ .

определяется в результате решения. Форма представления результатов (зависимости от распределения давления) была принята из-за монотонности распределения возмущения давления в области до точки нулевого трения. Представленные на рис. 1–3 результаты соответствуют трем значениям коэффициента пористости  $\beta = 0.25, 0.5, 0.75$ .

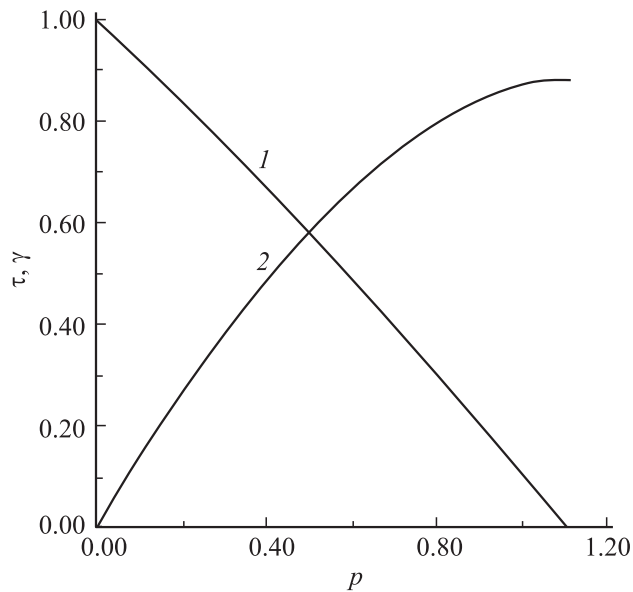
Все представленные результаты показывают, что рост коэффициента пористости приводит к росту индуцированного градиента давления. В то же время можно видеть, что индуцированное давление в точке нулевого трения остается приблизительно тем же самым (и равным примерно единице). Для анализа решений при больших значениях коэффициента пористости рассмотрим соответствующий предельный переход.

Для больших значений коэффициента пористости  $\beta \gg 1$  можно предположить, что область взаимодействия будет иметь более сложную — четырехпалубную структуру вместо исходной трехпалубной.



**Рис. 2.** Распределение поверхностного трения (кривая 1) и индуцированный градиент давления (кривая 2) как функции индуцированного распределения давления  $p$  при  $\beta = 0.50$ .

Исходная структура включала в себя слабозмущенное невязкое течение в части внешнего потока над областью взаимодействия, область течения в пограничном слое, в которой характерны линейные возмущения невязкой природы и, наконец, пристеночную область вязкого нелинейно возмущенного течения. Увеличение числа областей связано с тем, что в области, где характерны нелинейные изменения становятся несущественными эффекты вязкости. Для удовлетворения условию прилипания приходится вводить в рассмотрение дополнительную пристеночную область вязкого течения (пограничный слой), течение в которой не влияет в первом приближении на индуцированное распределение давления. Можно предположить также, что основные изменения толщины вытеснения будут индуцироваться в области с нелинейными изменениями скорости. Структура области возмущенного течения связана с уменьшением продольного размера



**Рис. 3.** Распределение поверхностного трения (кривая 1) и индуцированный градиент давления (кривая 2) как функции индуцированного распределения давления  $p$  при  $\beta = 0.75$ .

области возмущенного течения. Анализ исходной задачи как для линейного, так и для нелинейного режимов приводит к следующей оценке для продольного размера области взаимодействия:

$$\Delta x \sim 1/\beta. \quad (9)$$

Решение в области нелинейных возмущений при отсутствии влияния вязкости можно представить в виде  $u = y + A(x)$ . Уравнение для продольного импульса принимает вид

$$A \frac{\partial A}{\partial x} + v_w + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad p = -\frac{\partial A}{\partial x}, \quad v_w = -\beta p, \quad (10)$$

$$A \frac{\partial A}{\partial x} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0.$$

Сравнение второго и третьего членов в последнем уравнении (10) приводит к следующей оценке для длины области возмущенного течения:

$$\Delta x \sim \frac{1}{\beta}. \quad (11)$$

Условие взаимодействия дает оценку для изменения толщины вытеснения

$$A \sim \frac{p}{\beta}.$$

Предполагая, что индуцированное давление ограничено, может быть выведено следующее уравнение:

$$\beta \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$A = -\frac{c}{\beta} \exp(\beta x), \quad p = c \exp(\beta x). \quad (13)$$

Решение в пристеночной области течения можно записать в виде

$$u = y + u_1(x, y), \quad v = v_w - y \frac{\partial u_1}{\partial x}. \quad (14)$$

Тогда уравнение для продольного импульса принимает вид

$$(y + u_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left( v_w - y \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}.$$

Принимая во внимание, что решение для распределения давления известно, можно получить

$$u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_w \frac{\partial u_1}{\partial x} - y \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (15)$$

Анализ этого уравнения показывает, что толщина области вязкого течения оценивается следующим образом:

$$y \sim 1/p\beta. \quad (16)$$

Уравнение продольного количества движения принимает вид

$$v_w \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (17)$$

Подстановка распределения вертикальной скорости на стенке приводит к следующему уравнению:

$$-\beta p \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}. \quad (18)$$

Решение, соответствующее модифицированному граничному условию на стенке и граничному условию на больших расстояниях выше по течению, имеет вид

$$u_1 = A(1 - \exp(-\beta p y)). \quad (19)$$

Распределение трения на поверхности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + A\beta p \quad (20)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - c^2 \exp(\beta x). \quad (21)$$

Если начало декартовой системы координат соответствует точке нулевого трения, тогда  $c = 1$ , и соответствующая величина давления в этой точке  $p = c \exp(\beta x) = 1$ . Этот результат подтверждает численные результаты, полученные для больших значений коэффициента пористости  $\beta$ .

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 08-01-00594а).

## Список литературы

- [1] *Нейланд В.Я.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.
- [2] *Stewartson K., Williams P.G.* // Self-induced separation. Proc. Roy. Soc. A. 1969. V. 312. N 1509. P. 181–206.
- [3] *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: Наука, 2004. 536 с.
- [4] *Neyland V.Ya., Bogolepov V.V., Dudin G.N., Lipatov I.I.* Asymptotic Theory of Supersonic Viscous gas Flows. Elsevier Ltd, 2008. 536 p.